4

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

第四版



责任编辑　宋　涛　邱　蕾

封面设计　庞　婕　孙　佳

新版推荐

经典Б.П.吉米多维奇数学习题集系列

数学分析习题集题解（共六册）

1　分析引论	定价：19.00元
2　单变量函数的微分学	定价：19.00元
3　不定积分　定积分	定价：20.00元
4　级数	定价：19.00元
5　多变量函数的微分法　带参数的积分	定价：22.00元
6　重积分和曲线积分	定价：19.00元
数学分析习题集精选精解	定价：39.00元
数学分析习题集——提示·解题思路·答案	定价：39.00元
高等数学习题精选精解	定价：39.80元


ISBN 978-7-5331-5897-2

9 787533 158972

定价：19.00元

4

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

Б.П.吉米多维奇
数学分析
习题集题解

第四版

山东科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

Б. П. 吉米多维奇数学分析习题集题解 4/费定晖，周学圣编演. —4 版. —济南：山东科学技术出版社，2012
ISBN 978-7-5331-5897-2

Ⅰ. ①吉... Ⅱ. ①费... ②周... Ⅲ. ①数学分析—高等学校—题解 Ⅳ. ①017-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 120148 号

Б. П. 吉米多维奇
数学分析习题集题解 4

出版者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路16号
邮编：250002 电话：(0531) 82098088
网址：www.lkj.com.cn
电子邮件：sdkj@sdpress.com.cn

发行者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路16号
邮编：250002 电话：(0531) 82098071

印刷者：山东新华印刷厂潍坊厂
地址：潍坊市潍州路753号
邮编：261031 电话：(0536) 2116806

开本：787 mm × 1092mm 1/16
印张：14.5
版次：2012 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-5331-5897-2
定价：19.00 元

第四版前言 DISIBANQIANYAN

本书自1979年出版发行以来，历经30多个春秋，一直畅销不衰，深得读者厚爱。在郭大钧教授的帮助和指导下，对全书我不断地修订和补充，不断地修正错误，不断地替换更为简洁的解法和证明，力求本书一直保持其先进性、完整性和准确性，以求对读者的高度责任感。读者通过学习该书，对掌握数学分析的基本知识、基础理论和基本技能的训练，感到获益匪浅，赞誉其为学习数学分析“不可替代”之图书，对此我们倍感欣慰，鞭策我们为读者作出更多的奉献。

这次受山东科学技术出版社的约请，并得到郭大钧教授的大力支持，仍由我负责全书第四版的修订、增补和校阅工作，以适应文化建设繁荣发展的需要，更加激发全国广大读者的强烈求知欲。具体主要做了以下几方面的工作：

第一，为全书4462题中的近三成的习题，根据题型的不同，在原题解的前面，分别或给出提示，或给出解题思路，或给出证明思路。冀图启发读者怎样分析该题，怎样下手求解；启发读者怎样总结解题的规律；启发读者怎样正确使用有关的数学公式、概念和理论，开拓视野，活跃思路；帮助读者逐步解决学习中的困难，为他们在学习过程中提供一个良师益友。这是本次修订的主要工作。

第二，根据当前的语言习惯，对全书的文字作了较多的润色，使其表述更加准确，更加简洁凝练。

第三，改正了第三版中的个别印刷错误，修正了函数图像中的个别问题和个别习题的答案。

第四，根据国家相关标准，规范了有关术语和数学式子的表达；并对全书使用的外国人名，按照现在的标准或通用译法重新翻译人名，以求统一标准。

第五，对全书的版面和开本重新进行了调整，使其更富有时代的色彩。

我们殷切期望使用本书的读者，懂得只有通过个人的独立思考，加上勤学苦练才能取得成功，“只看不练假把式”，数学的学习是在个人的独立解题中逐步弄懂有关的概念、公式和理论的，我们编写本书，就是希望能

对数学分析课程的学习起到一个抛砖引玉的作用。读者使用本书最好是不要先看题解,更不要查抄解答和答案,而是自己先对照教材中的有关概念、公式和理论独立进行思考,必要时可参照书中的提示、解题思路或证明思路独立完成解题,然后再查看书中是怎样解答的,比较自己的解答和书中解答的异同,从中找出差距,找出自己的问题所在,甚至找出书中解答的的错误和不足之处,进而找到更为简洁的解答。只有这样才能提高自己的思维能力和创造才能,任何削弱独立思考的做法都是违背我们出版本书的初衷的。

山东科学技术出版社颜秀锦、宋德万、胡新蓉等老一代资深编辑为本书前三版的出版和发行付出了艰辛努力,责任编辑宋涛为本书第四版怎样提高质量倾注了不少心血,在此我们一并表示感谢。同时感谢山东大学、华东交通大学、山东师范大学等兄弟学校对本书出版的支持。感谢社会各界同仁对本书的支持。虽然历经 30 余年的反复修订,面对如此庞大的图书,限于本人水平,书中难免有错误和不当之处,敬请各位专家、同仁和广大读者批评指正,不胜感激,并在新版中改正。

费定晖

2012 年 5 月于南昌华东交通大学

出版说明 CHUBANSHUOMING

吉米多维奇(Б. П. ДЕМИДОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本,自50年代初在我国翻译出版以来,引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生,常以试解该习题集中的习题,作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来,对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题,数量多,内容丰富,由浅入深,部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限,一元函数微分学,不定积分,定积分,级数,多元函数微分学,带参数的积分以及多重积分与曲线积分、曲面积分等等,概括了数学分析的全部主题。当前,我国广大读者,特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者,在为四个现代化而勤奋学习的热潮中,迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此,我们特约作者,将全书4462题的所有解答汇辑成书,共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书,同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知,原习题集,题多难度大,其中不少习题如果认真习作的话,既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念,又可以有效地提高我们的运算能力,特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样,我们殷切期望初学数学分析的青年读者,一定要刻苦钻研,千万不要轻易查抄本书的解答,因为任何削弱独立思索的作法,都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准,仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免,一经发觉,恳请指正,不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题,都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有周家云同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中,还得到山东大学、山东工学院、山东师范学院和曲阜师范学院的领导和同志们的大力支持,特在此一并致谢。

1979年于济南

目录 MULU

第五章　级　　数

§1.　数项级数.同号级数收敛性的判别法

1° **一般概念**　对于数项级数

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n, \tag{1}$$

若存在极限

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S\quad(\text{级数的和}),$$

式中 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$,则称级数(1)为*收敛的*.反之,则称级数(1)为*发散的*.

2° **柯西准则**　级数(1)收敛的充分必要条件为:对于任何的 $\varepsilon>0$,都存在数 $N=N(\varepsilon)$,使得当 $n>N$ 和 $p>0$ 时,不等式

$$|S_{n+p}-S_n|=\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}a_i\right|<\varepsilon$$

成立.特别是,若级数收敛,则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

3° **比较判别法Ⅰ**　设除级数(1)外,还有级数

$$b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots. \tag{2}$$

若当 $n\geqslant n_0$ 时,不等式

$$0\leqslant a_n\leqslant b_n$$

成立,则:1)从级数(2)收敛可推得级数(1)收敛;2)从级数(1)发散可推得级数(2)发散.

特别是,当 $n\to\infty$ 时,若 $a_n\sim b_n$,则正项级数(1)和(2)同时收敛或同时发散.

4° **比较判别法Ⅱ**　若

$$a_n=O^*\left(\frac{1}{n^p}\right)^*,$$

则(ⅰ)当 $p>1$ 时级数(1)收敛,（ⅱ）当 $p\leqslant1$ 时级数(1)发散.

5° **达朗贝尔判别法**　若 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$及

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q,$$

则(ⅰ)当 $q<1$ 时级数(1)收敛,（ⅱ）当 $q>1$ 时级数(1)发散.

6° **柯西判别法**　若 $a_n\geqslant0\ (n=1,2,\cdots)$及

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q,$$

则(ⅰ)当 $q<1$ 时级数(1)收敛,（ⅱ）当 $q>1$ 时级数(1)发散.

7° **拉比判别法**　若 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$及

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p,$$

则(ⅰ)当 $p>1$ 时级数(1)收敛;（ⅱ）当 $p<1$ 时级数(1)发散.

8° **高斯判别法**　若 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$及

---

* 记号 O^* 的意义参阅第一章§6,1°.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+\frac{\theta_n}{n^{1+\epsilon}},$$

式中$|\theta_n|<C$而$\epsilon>0$，则（ⅰ）当$\lambda>1$时级数(1)收敛；（ⅱ）当$\lambda<1$时级数(1)发散；（ⅲ）当$\lambda=1$时，若$\mu>1$则级数(1)收敛；若$\mu\leqslant1$则级数(1)发散.

9° **柯西积分判别法** 若$f(x)$ $(x\geqslant1)$是非负不增函数，则

$$\text{级数} \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad \text{与} \quad \text{积分} \int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

同时收敛或同时发散.

直接证明下列级数的收敛性并求它们的和：

【2546】 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\cdots$.

解 由于

$$S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}=\frac{1-\frac{(-1)^n}{2^n}}{1+\frac{1}{2}},$$

故得$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$，即所给级数收敛，且其和为$\frac{2}{3}$.（以下有关各题省略这两句话）

【2547】 $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$.

解 由于

$$\begin{aligned}S_n&=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}},\end{aligned}$$

故得$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$.

【2548】 $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}+\cdots$.

提示 注意$\frac{1}{2}S_n=S_n-\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}\right)$，并利用58题的结果.

解 由于

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n},$$

从而有

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2n-3}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

并且

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}S_n&=S_n-\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{2}{2^n}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\left(1+1+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}\right),\end{aligned}$$

故得 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}=3.$

【2549】 $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\cdots.$

提示 注意$\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，即知 $S_n=1-\dfrac{1}{n+1}$.

解 由于

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1},$$

故得 $S=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=1.$

【2550】 $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots.$

提示 注意$\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}\right)$，即知 $S_n=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{3n+1}\right)$.

解 由于

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right),$$

故得 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{3}.$

【2551】 (1) $q\sin\alpha+q^2\sin 2\alpha+\cdots+q^n\sin n\alpha+\cdots\quad(|q|<1)$;

(2) $q\cos\alpha+q^2\cos 2\alpha+\cdots+q^n\cos n\alpha+\cdots\quad(|q|<1)$.

提示 令 $z=q(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)=qe^{\mathrm{i}\alpha}$，其中 $\mathrm{i}^2=-1$. 并注意 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n=\dfrac{1}{1-z}$及利用棣莫弗公式.

解 令 $z=q(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)=qe^{\mathrm{i}\alpha}$，其中 $\mathrm{i}^2=-1$. 于是，得$|z|=|q|<1$，并且有

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}q^n\cos n\alpha+\mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty}q^n\sin n\alpha \tag{1'}$$

及

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-q\cos\alpha-\mathrm{i}q\sin\alpha}=\frac{(1-q\cos\alpha)+\mathrm{i}q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}. \tag{2'}$$

比较(1′)、(2′)两式的实部及虚部，即得

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n\sin n\alpha=\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n\sin n\alpha=\dfrac{q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n\cos n\alpha=\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n\cos n\alpha-1=\dfrac{1-q\cos\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}-1=\dfrac{q\cos\alpha-q^2}{1-2q\cos\alpha+q^2}.$

【2552】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

提示 $S_n=1-\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$.

解 由于

$$S_n=(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)+(\sqrt{4}-2\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{5}-2\sqrt{4}+\sqrt{3})+(\sqrt{6}-2\sqrt{5}+\sqrt{4})$$
$$+\cdots+(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$$
$$=1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}=1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}},$$

故得 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1-\sqrt{2}$.

【2553】 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 的收敛性.

提示 记 $x=k\pi$. 若 k 为非整数，可用反证法证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin nx\neq 0$. 若 k 为整数，则级数收敛.

解 记 $x=k\pi$. 若 k 为整数，则由 $\sin nx=0$ 知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 是收敛的，且其和为零. 若 k 为非整数，我们以下将证 $\sin nx$ 并不趋于零，于是，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 发散. 可采用反证法. 假设

$$\lim_{n\to\infty}\sin nx=0,$$

则当 $n\to\infty$ 时也有 $\sin(n+1)x\to 0$. 但是，

$$\sin(n+1)x=\sin nx\cos x+\cos nx\sin x,$$

由 $\sin(n+1)x\to 0$ 及 $\sin nx\to 0$（当 $n\to\infty$ 时）知 $\cos nx\sin x\to 0$（当 $n\to\infty$ 时），而 $\sin x=\sin k\pi\neq 0$，故必有

$$\lim_{n\to\infty}\cos nx=0.$$

但

$$1=\sin^2 nx+\cos^2 nx.$$

令 $n\to\infty$，两端取极限，即得左端为 1 而右端为 0，这就产生了 1 与 0 相等的谬论. 这个矛盾证明了此假设不真，也即 $\sin nx \not\to 0$（当 $n\to\infty$ 时），从而，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 的发散性获证.

【2554】 证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则把该级数的各项在不变更其先后次序的情况下分别组合起来，所得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n \quad \left(\text{其中 } A_n=\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1}a_i \quad (p_1=1,\ p_1<p_2<\cdots)\right)$$

也收敛且有相同的和. 反之不真. 举出例子.

证明思路 注意到级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 的前 n 项之和为 $l_n=\sum\limits_{k=1}^{n}A_k=\sum\limits_{k=1}^{p_{n+1}-1}a_k$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的前 $p_{n+1}-1$ 项之和 $S_{p_{n+1}-1}=\sum\limits_{k=1}^{p_{n+1}-1}a_k$，故 $l_n=S_{p_{n+1}-1}$. 由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的收敛性，即知 $\lim\limits_{n\to\infty}l_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_{p_{n+1}-1}=S$，其中 S 为定值. 于是，命题获证.

反之不真. 例如，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=1-1+1-1+\cdots$ 发散，但按下述方法组成的级数 $(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$ 却收敛.

证 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 的部分和数列为 $l_1,l_2,\cdots,l_n,\cdots$，则 $l_n=\sum\limits_{k=1}^{n}A_k=\sum\limits_{k=1}^{p_{n+1}-1}a_k$.

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，故其部分和数列 $\{S_n\}$ 趋于定值 S，因此，

$$\lim_{n\to\infty}l_n=\lim_{n\to\infty}S_{p_{n+1}-1}=S,$$

即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 是收敛的，且与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 有相同的和. 反之不真. 例如，级数

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$$

是发散的，但按下述方法组成的级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

却是收敛的.

【2555】 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的各项是正的，且把这级数的各项分别组合而得到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛，则原来的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

证明思路 记原级数的前 n 项之和为 S_n，注意到 $a_k>0$ $(k=1,2,\cdots)$，则显然可知：

(1) $S_n<S_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$；

(2) 存在正整数 n_0，使有 $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k<\sum_{l=1}^{n_0} A_l<S$，其中 S 为收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 之和. 于是，命题易获证.

证 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛，记其和为 S. 考虑原级数的部分和 $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$，并注意到 $a_k>0$ $(k=1,2,\cdots)$，故存在正整数 n_0，使

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k<\sum_{l=1}^{n_0} A_l<S.$$

显然 $S_n<S_{n+1}$ 对一切 n 成立. 于是，$\{S_n\}$ 单调上升且有界. 因此，极限 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在有限，即原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

研究下列级数的收敛性：

【2556】 $1-1+1-1+1-1+\cdots$.

提示 注意 $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}$ 不存在.

解 由于通项 $a_n=(-1)^{n-1}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限不存在，更不可能趋于零，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ 发散.

【2557】 $0.001+\sqrt{0.001}+\sqrt[3]{0.001}+\cdots$.

提示 利用 63 题的结果.

解 由于 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{0.001}=1\neq 0$，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0.001}$ 发散.

【2558】 $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$.

提示 利用 72 题的结果.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)-1=\mathrm{e}-1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛，且其和为 $\mathrm{e}-1$.

【2559】 $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots$.

提示 注意 $\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}>0$.

解 由于 $\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}>0$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 也发散.

【2560】 $\frac{1}{1001}+\frac{1}{2001}+\frac{1}{3001}+\cdots+\frac{1}{1000n+1}+\cdots$.

提示 注意 $\frac{1}{1000n+1}\geqslant\frac{1}{1001n}>0$.

解 由于 $\frac{1}{1000n+1}\geqslant\frac{1}{1001n}$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1001n}$ 发散，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1000n+1}$ 也发散.

【2561】 $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\cdots+\frac{n}{2n-1}+\cdots$.

提示 注意$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}$.

解 由于$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}\neq0$,故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}$发散.

【2562】 $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots$.

提示 注意$0<\frac{1}{(2n-1)^2}\leqslant\frac{1}{n^2}$.

解 由于$0<\frac{1}{(2n-1)^2}\leqslant\frac{1}{n^2}$,且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$也收敛.

【2563】 $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt{n+1}}+\cdots$.

提示 注意$0<\frac{1}{n\sqrt{n+1}}<\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

解 由于$0<\frac{1}{n\sqrt{n+1}}<\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$,且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛,故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$也收敛.

【2564】 $\frac{1}{\sqrt{1\cdot3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}+\cdots$.

提示 注意$\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}>\frac{1}{2n}>0$.

解 由于$\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}>\frac{1}{2n}>0$,且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$发散,故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$也发散.

【2565】 证明:由等差级数各项的倒数组成的级数是发散的.

证明思路 设等差级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[a+(n-1)d]$,其中$d$为公差.可以从下面三种情况来证明命题.

(1) $d>0$,总存在正整数n_0,使有$a<(n_0-1)d$,则当$n\geqslant n_0$时,有$a+(n-1)d<2(n-1)d$.于是,只需注意到

$$\frac{1}{a+(n-1)d}>\frac{1}{2(n-1)d}>\frac{1}{2nd}>0,$$

即知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a+(n-1)d}$发散.

(2) $d=0$,则$a\neq0$,该级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a}$显然发散.

(3) $d<0$.将此级数的各项乘以-1,即化为$d>0$的情形.

证 设等差级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[a+(n-1)d]$,其中$d$为公差.

当$d>0$时,总存在正整数n_0,使$a<(n_0-1)d$,则当$n\geqslant n_0$时,有$a+(n-1)d<2(n-1)d$.于是,

$$\frac{1}{a+(n-1)d}>\frac{1}{2(n-1)d}>\frac{1}{2nd}>0,$$

注意到级数$\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{2nd}$发散,因而,级数$\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{a+(n-1)d}$发散,故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a+(n-1)d}$也发散.

当$d=0$时,a不可能为零,此时级数$\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\cdots+\frac{1}{a}+\cdots$显然发散.

当$d<0$时,将此级数的各项乘以-1即化为$d>0$的情形,于是,这级数也发散.

总上所述,不论d为何值,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a+(n-1)d}$均发散.

【2566】 证明:若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (A)及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ (B)皆收敛且$a_n\leqslant c_n\leqslant b_n(n=1,2,\cdots)$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ (C)

也收敛，若级数(A)与(B)皆发散，问级数(C)的收敛性若何？

提示 (1)先证级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)$ 收敛. (2)可能收敛，也可能发散. 例如，$a_n=-1, b_n=1, c_n=0, c_n=\frac{1}{2}$ $(n=1,2,\cdots)$.

证 当级数(A)及(B)收敛时，由于 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$，故 $0\leqslant c_n-a_n\leqslant b_n-a_n$. 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)$ 也收敛，再由级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)$ 的收敛性即知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[a_n+(c_n-a_n)]=\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 也收敛.

若级数(A)与(B)皆发散，则级数(C)可能收敛，也可能发散. 例如，级数

$$-1-1-1-\cdots \quad 及 \quad 1+1+1+\cdots$$

皆发散，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 当 $c_n=0\ (-1<c_n<1)$ 时收敛；当 $c_n=\frac{1}{2}\ (-1<c_n<1)$ 也发散.

【2567】 设已知二发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 的各项不为负数，问下列级数的收敛性若何：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\min(a_n,b_n)$ 及 (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\max(a_n,b_n)$?

提示 (1)可能收敛，也可能发散. 例如，

$$a_n=\frac{1+(-1)^n}{2},\quad b_n=\frac{1-(-1)^n}{2} \quad 及 \quad a_n=\frac{1}{n},\quad b_n=\frac{1}{2n}.$$

(2)注意 $\max(a_n,b_n)\geqslant a_n\geqslant 0$.

解 (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\min(a_n,b_n)$ 可能收敛，也可能发散. 例如，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{2}$ 皆发散，但是 $\sum_{n=1}^{\infty}\min(a_n,b_n)=0+0+\cdots+0+\cdots$ 却收敛. 又如，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 皆发散，但是 $\sum_{n=1}^{\infty}\min(a_n,b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 也发散.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\max(a_n,b_n)$ 一定发散. 事实上，$\max(a_n,b_n)\geqslant a_n\geqslant 0$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\max(a_n,b_n)$ 也发散.

【2568】 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,(a_n\geqslant 0)$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 也收敛. 逆命题不成立，举出例子.

证明思路 注意到 $a_n\to 0$，故存在 n_0，使当 $n\geqslant n_0$ 时，有 $0\leqslant a_n<1$. 从而也有 $0\leqslant a_n^2<a_n$.

反之不真. 例如，$a_n=\frac{1}{n}$.

证 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 于是，总存在 n_0. 使当 $n\geqslant n_0$ 时，有 $0\leqslant a_n<1$. 从而，当 $n\geqslant n_0$ 时，有 $0\leqslant a_n^2<a_n$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，当然级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n$ 收敛，故级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n^2$ 收敛，从而，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 也收敛.

反之不真. 例如，$a_n=\frac{1}{n}$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 却发散.

【2569】 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$，$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$ 也收敛.

证明思路 首先，只要注意 $0\leqslant 2|a_nb_n|\leqslant a_n^2+b_n^2$，第一个结果即获证. 其次，由 $(a_n+b_n)^2=a_n^2+2a_nb_n+b_n^2$，易证第二个结果. 对于最后一个结果，只要令 $b_n=\frac{1}{n}$，利用第一个结果即获证.

证 由于$0\leqslant 2|a_nb_n|\leqslant a_n^2+b_n^2$，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$收敛，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$收敛.

其次，由于$(a_n+b_n)^2=a_n^2+b_n^2+2a_nb_n$，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$皆收敛，故知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$也收敛.

最后，设$b_n=\dfrac{1}{n}$，利用第一个结果即证得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|a_n|}{n}$收敛.

【2570】 证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=a\neq 0$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

证明思路 不妨设$a>0$. 由题设$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=a$可知，对任给的$0<\varepsilon<a$，存在正整数$n_0$，使当$n\geqslant n_0$时，有

$$na_n>a-\varepsilon \quad 或 \quad a_n>(a-\varepsilon)\frac{1}{n},$$

命题易获证.

对于$a<0$. 只须将级数各项乘以-1，即化为$a>0$的情形.

证 $na_n=\dfrac{a_n}{\frac{1}{n}}$. 不妨设$a>0$. 由于$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=a$，故对于任给的$0<\varepsilon<a$，总存在正整数$n_0$，使当$n\geqslant n_0$时，有

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n}}>a-\varepsilon>0 \quad 或 \quad a_n>(a-\varepsilon)\frac{1}{n}>0.$$

如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则级数$\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}a_n$也收敛，从而会得出级数$\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\dfrac{1}{n}$收敛的错误结论. 因此，原级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

若$a<0$，只要将级数各项乘以-1，即化为$a>0$的情形.

【2571】 证明：若各项为正且其值单调递减的级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

证 对于任何的m与$n>m$，我们有

$$(n-m)a_n<a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n<\alpha_m,$$

其中α_m为该收敛级数的余式，由此得$na_n<\dfrac{n}{n-m}\alpha_m$.

由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，故对于任给的$\varepsilon>0$，我们可取定某$m_0$，使$\alpha_{m_0}<\varepsilon$.

其次，由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n-m_0}=1$，故存在正整数$n_0(n_0>m_0)$，使当$n\geqslant n_0$时，有$\dfrac{n}{n-m_0}<2$.

于是，当$n\geqslant n_0$时，有$0<na_n<2\varepsilon$，因此，$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$. 本题得证.

【2572】 若当$p=1,2,3,\cdots$时，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})=0$. 问级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$是否收敛？

提示 不一定收敛. 例如，$a_n=\dfrac{1}{n}$.

解 若当$p=1,2,3\cdots$时，

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})=0, \tag{1}$$

并不一定有级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛. 例如，取$a_n=\dfrac{1}{n}$，显然级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，但却有

$$0<a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}<\frac{p}{n+1},$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p}{n+1}=0$，故对于一切$p$，(1)式均成立.

这个事实与柯西准则并不矛盾，因为在柯西准则中，对于任给的 $\varepsilon>0$，存在数 $N=N(\varepsilon)$，使当 $n>N$ 和 $p>0$ 时，不等式

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon$$

成立，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 其中的 N 只依赖于 ε，而与 p 无关. 本题的叙述中，条件并没有排除 N 要与 p 有关.

利用柯西准则，证明下列正项级数的收敛性：

【2573】 $a_0+\frac{a_1}{10}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}+\cdots \quad (|a_n|<10)$.

证 $$|S_{n+p}-S_n|=\left|\frac{a_n}{10^n}+\frac{a_{n+1}}{10^{n+1}}+\cdots+\frac{a_{n+p-1}}{10^{n+p-1}}\right|\leqslant\frac{|a_n|}{10^n}+\frac{|a_{n+1}|}{10^{n+1}}+\cdots+\frac{|a_{n+p-1}|}{10^{n+p-1}}$$

$$<\frac{1}{10^{n-1}}\left(1+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10^{p-1}}\right)<\frac{1}{10^{n-1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{9\cdot 10^{n-2}}.$$

任给 $\varepsilon>0$，要 $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$，只要 $\frac{1}{10^{n-2}}<9\varepsilon$，即只要 $n>2+\lg\frac{1}{9\varepsilon}$. 取 $N=2+[\lg\frac{1}{9\varepsilon}]$，则当 $n>N$ 时，不等式 $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$ 对一切正整数 p 皆成立，因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$ 收敛.

【2574】 $\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\cdots+\frac{\sin nx}{2^n}+\cdots$.

提示 注意级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，以及有 $|S_{n+p}-S_n|\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}$.

证 $$|S_{n+p}-S_n|=\left|\frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}}\right|\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}. \tag{1}$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，故按柯西准则，对于任给的 $\varepsilon>0$，总存在正整数 N，使当 $n>N$ 时，对任意正整数 p，有

$$\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}<\varepsilon. \tag{2}$$

由(1)式及(2)式得知，当 $n>N$ 时，不等式 $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$ 对一切正整数 p 皆成立.

因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$ 收敛.

【2575】 $\frac{\cos x-\cos 2x}{1}+\frac{\cos 2x-\cos 3x}{2}+\cdots+\frac{\cos nx-\cos(n+1)x}{n}+\cdots$.

解 $$S_{n+p}-S_n=\sum_{i=n+1}^{n+p}\frac{\cos ix-\cos(i+1)x}{i}$$

$$=\frac{\cos(n+1)x}{n+1}-\sum_{i=n+1}^{n+p-1}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)\cos(i+1)x-\frac{\cos(n+p+1)x}{n+p},$$

故

$$|S_{n+p}-S_n|\leqslant\frac{1}{n+1}+\sum_{i=n+1}^{n+p-1}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)+\frac{1}{n+p}=\frac{2}{n+1}<\frac{2}{n}.$$

对于任给的 $\varepsilon>0$，取正整数 $N=[\frac{2}{\varepsilon}]$，则当 $n>N$ 时，对于一切正整数 p，有

$$|S_{n+p}-S_n|<\frac{2}{n}<\varepsilon.$$

因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx-\cos(n+1)x}{n}$ 收敛.

利用柯西准则，证明下列级数的发散性：

【2576】 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$.

证明思路 不论 n 多大，若令 $p=n$，则有

$$|S_{n+p}-S_n|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n项}=\frac{1}{2}.$$

解 取 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$. 不论 n 多大，若令 $p=n$，则有

$$|S_{n+p}-S_n|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\underbrace{\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n项}=\frac{1}{2}>\varepsilon_0.$$

因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

【2577】 $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$.

证明思路 不论 n 多大，若令 $p=3n$，则有

$$\begin{aligned}|S_{3n+p}-S_{3n}|&=\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+3}+\cdots+\frac{1}{6n-2}+\frac{1}{6n-1}-\frac{1}{6n}\\&>\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+3}-\frac{1}{3n+3}+\cdots+\frac{1}{6n}+\frac{1}{6n}-\frac{1}{6n}\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)>\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

解 取 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{6}$. 不论 n 多大，若令 $p=3n$，则有

$$\begin{aligned}|S_{3n+p}-S_{3n}|&=\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+3}+\cdots+\frac{1}{6n-2}+\frac{1}{6n-1}-\frac{1}{6n}\\&>\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+3}-\frac{1}{3n+3}+\cdots+\frac{1}{6n}+\frac{1}{6n}-\frac{1}{6n}\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)>\frac{1}{3}\left(\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n 项}\right)=\frac{1}{6}>\varepsilon_0.\end{aligned}$$

因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+3}\right)$ 发散.

运用达朗贝尔判别法、柯西判别法或比较判别法，研究下列级数的收敛性：

【2578】 $\frac{1000}{1!}+\frac{1000^2}{2!}+\frac{1000^3}{3!}+\cdots+\frac{1000^n}{n!}+\cdots$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{1000^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1000}{n+1}=0<1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1000^n}{n!}$ 收敛.

【2579】 $\frac{(1!)^2}{2!}+\frac{(2!)^2}{4!}+\cdots+\frac{(n!)^2}{(2n)!}+\cdots$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2(2n+1)}=\frac{1}{4}<1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ 收敛.

【2580】 $\frac{1!}{1^1}+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\cdots+\frac{n!}{n^n}+\cdots$.

提示 利用达朗贝尔判别法及69题的结果.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1}=e^{-1}<1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ 收敛.

【2581】 (1) $\frac{2\cdot 1!}{1^1}+\frac{2^2\cdot 2!}{2^2}+\frac{2^3\cdot 3!}{3^3}+\cdots+\frac{2^n n!}{n^n}+\cdots$;

(2) $\frac{3\cdot 1!}{1^1}+\frac{3^2\cdot 2!}{2^2}+\frac{3^3\cdot 3!}{3^3}+\cdots+\frac{3^n n!}{n^n}+\cdots$.

解 (1)由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=\frac{2}{e}<1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ 收敛.

(2)由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}3\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=\frac{3}{e}>1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$ 发散.

【2582】 $\frac{(1!)^2}{2}+\frac{(2!)^2}{2^4}+\frac{(3!)^2}{2^9}+\cdots+\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}+\cdots$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{[(n+1)!]^2}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}}=0<1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ 收敛.

【2583】 $\frac{1000}{1}+\frac{1000\cdot 1001}{1\cdot 3}+\frac{1000\cdot 1001\cdot 1002}{1\cdot 3\cdot 5}+\cdots$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1000+n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1.$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1000\cdot 1001\cdots(1000+n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}$ 收敛.

【2584】 $\frac{4}{2}+\frac{4\cdot 7}{2\cdot 6}+\frac{4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 6\cdot 10}+\cdots$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{4n+2}=\frac{3}{4}<1,$$

故级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4\cdot7\cdot10\cdots(3n+4)}{2\cdot6\cdot10\cdots(4n+2)}$收敛.

【2585】 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdots(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2})$.

提示 同 2580 题并利用 63 题的结果.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n=1}(\sqrt{2}-\sqrt[2n+3]{2})=\sqrt{2}-1<1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdots(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2})$收敛.

【2586】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$.

提示 利用柯西判别法及 65 题的结果.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}\ \sqrt[n]{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}<1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$收敛.

【2587】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$.

提示 注意通项 $a_n\geqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\sqrt[n]{n}\to e^{-1}$,并利用比较判别法.

解 $\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}\geqslant\frac{n^n\cdot n^{\frac{1}{n}}}{(n+1)^n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\sqrt[n]{n}>0$, 对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\sqrt[n]{n}$. 由于其通项趋于$\frac{1}{e}\neq0$,故它是发散的.因此,原级数也是发散的.

注意 若用达朗贝尔判别法,则有$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$,无明确结论,此时还应改用高斯判别法.

【2588】 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$.

提示 注意当 $n\geqslant2$ 时,$\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}>\frac{1}{\sqrt[n]{n}}>0$. 并利用 65 题的结果及比较判别法.

解 当 $n\geqslant2$ 时, $\ln n<n$. 于是,

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}>\frac{1}{\sqrt[n]{n}}>0.$$

对于级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$,由于$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1\neq0$,故它是发散的.因此,原级数也发散.

注意 若用达朗贝尔判别法,将遇到与 2587 题类似的情况.

【2589】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$.

提示 注意 $0<\frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}<\frac{n^{n-1}}{(n^2)^{\frac{n+1}{2}}}=\frac{1}{n^2}$,并利用比较判别法.

解 由于 $0<\frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}<\frac{n^{n-1}}{(n^2)^{\frac{n+1}{2}}}=\frac{1}{n^2}$,且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,故原级数也收敛.

注意 若用达朗贝尔判别法，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left[\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\cdot\frac{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(2n^2+5n+4)^{\frac{n+2}{2}}}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{n}{(2n^2+5n+4)^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(\frac{2n^2+n+1}{2n^2+5n+4}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right]$$

$$=e\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{e}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1,$$

也可证得原级数收敛.

【2590】 $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\cdots$.

提示 注意$\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{4}=2\sin\frac{\pi}{4}$，利用数学归纳法，可证通项 $a_n=2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$，并利用达朗贝尔判别法.

解 解法 1：$\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{4}=2\sin\frac{\pi}{4}$，

$$\sqrt{2-\sqrt{2}}=\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{4}}=2\sin\frac{\pi}{8},$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{2-\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{8}}=2\sin\frac{\pi}{16},$$

利用数学归纳法，可证得通项为 $a_n=2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\frac{1}{2}<1,$$

故级数收敛.

解法 2：$$\sqrt{2-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}.$$

利用数学归纳法，可证得

$$\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ 重根号}}}=\frac{1}{\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ 重根号}}}}\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{(n-1)\text{ 重根号}}}.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ 重根号}}}}=\frac{1}{2}^{*)}<1,$$

故级数收敛.

*） 利用 637 题的结果.

【2591】 证明：若$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$ $(a_n>0)$，则 $a_n=o(q_1^n)$，其中 $q_1>q$.

证 由于$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$，故利用 141 题的结果，即得$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$.

令 $\varepsilon=\frac{1}{2}(q_1-q)>0$，则由上式知存在 n_0，使当 $n\geqslant n_0$ 时，有$|\sqrt[n]{a_n}-q|<\varepsilon$，从而有

$$\sqrt[n]{a_n}<q+\varepsilon=\lambda q_1\quad(n\geqslant n_0),$$

其中 $\lambda=\dfrac{q_1+q}{2q_1}<1$. 利用 $\lambda^n=o\ (1)$，即证得 $a_n=\lambda^n q_1^n=o(q_1^n)$.

【2592】 证明：若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q<1\ (a_n>0)$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

逆命题不成立. 研究例子 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}+\cdots$.

证 取 $0<\varepsilon<1-q$，由于 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q<1$，故存在 n_0，使当 $n\geqslant n_0$ 时，有 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<q+\varepsilon=l<1$. 从而，

$$0<a_n\leqslant a_{n_0}l^{n-n_0}\quad (n\geqslant n_0).$$

由于级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}l^{n-n_0}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}a_n$ 收敛，从而，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

反之不真，例如，级数 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}+\cdots$ 显然是收敛的. 但是，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\begin{cases}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{m+1}, & n=2m+1,\\[2mm] \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{m}, & n=2m,\end{cases}$$

故有 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=+\infty$.

【2593】 证明：若对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(a_n>0)$，存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q, \tag{1}$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q \tag{2}$$

也存在.

逆命题不成立：若极限(2)存在，则极限(1)可以不存在. 研究例子 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$.

证 利用 141 题的结论，本题的前半部分即得证.

反之不真. 例如，对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{3+(-1)^n}}{2\cdot\sqrt[n]{2}}=\frac{1}{2}.$$

但是，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3+(-1)^{n+1}}{2[3+(-1)^n]}=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & n\text{ 为偶数；}\\ 1, & n\text{ 为奇数，}\end{cases}$$

故极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 不存在.

【2594】 证明：若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=q\ (a_n\geqslant 0)$，则 (1) 当 $q<1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；(2) 当 $q>1$ 时级数发散(柯西判别法的推广).

证 (1) 取 $0<\varepsilon<\dfrac{1}{2}(1-q)$. 由于 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=q$，故存在 n_0，使当 $n\geqslant n_0$ 时，有 $0<\sqrt[n]{a_n}<q+\varepsilon$. 从而，

$$0<\sqrt[n]{a_n}<\frac{q+1}{2}\quad (n\geqslant n_0)\quad \text{或}\quad 0<a_n<\left(\frac{q+1}{2}\right)^n\quad (n\geqslant n_0).$$

由于 $0\leqslant q<1$，故 $0<\dfrac{q+1}{2}<1$. 又因级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\left(\dfrac{q+1}{2}\right)^n$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}a_n$ 收敛，从而，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(2) 由于 $q>1$，故对于数列 $\{a_n\}$，必有无穷多个 a_n，能使不等式 $\sqrt[n]{a_n}>1$ 成立，从而，$a_n>1$. 于是，当 $n\to\infty$ 时，a_n 不可能趋于零，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

研究下列级数的收敛性：

【2595】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$.

提示 利用柯西判别法及 63 题的结果.

解 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{2+(-1)^n}}{2}=\dfrac{1}{2}<1$，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$ 收敛.

【2596】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\cos^2\dfrac{n\pi}{3}}{2^n}$.

提示 注意 $0<\dfrac{n\cos^2\dfrac{n\pi}{3}}{2^n}<\dfrac{n}{2^n}$. 对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$ 利用柯西判别法及 65 题的结果.

解 $0<\dfrac{n\cos^2\dfrac{n\pi}{3}}{2^n}\leqslant\dfrac{n}{2^n}$. 对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n}}{2}=\dfrac{1}{2}<1$，故它是收敛的，从而，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cos^2\dfrac{n\pi}{3}}{2^n}$ 也是收敛的.

【2597】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}$.

提示 注意 $0<\dfrac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}\leqslant\dfrac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{3^n}$. 对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{3^n}$ 利用达朗贝尔判别法.

解 $0<\dfrac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}\leqslant\dfrac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{3^n}$.

对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{3^n}$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2}+1}{3}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^3=\dfrac{\sqrt{2}+1}{3}<1$，故它是收敛的，从而，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}$ 也是收敛的.

利用拉比判别法和高斯判别法，研究下列级数的收敛性：

【2598】 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^p+\left(\dfrac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^p+\left(\dfrac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^p+\cdots$.

提示 注意 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\dfrac{p}{2}$.

解 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\dfrac{2n+2}{2n+1}\right)^p$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{2n+2}{2n+1}\right)^p-1}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{p}{2n+1}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)-1}{\dfrac{1}{n}}=\frac{p}{2},$$

故当 $\dfrac{p}{2}>1$ 即 $p>2$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p$ 收敛.

【2599】 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{a(a+d)}{b(b+d)}+\dfrac{a(a+d)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)}+\cdots\quad(a>0,b>0,d>0)$.

提示 注意 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\dfrac{b-a}{d}$.

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{b+nd}{a+nd}$. 由于$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{b+nd}{a+nd}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(b-a)n}{a+nd}=\frac{b-a}{d}$,

故当$\frac{b-a}{d}>1$时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{b(b+d)\cdots[b+(n-1)d]}$收敛.

【2600】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+p}}$.

提示 注意$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p-\frac{1}{2}$.

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\frac{n!e^n}{n^{n+p}}}{\frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1+p}}}=\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+p}$.

由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+p}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}+p}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{e}\ e^{(\frac{1}{x}+p)\ln(1+x)}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{e}\ e^{1+(p-\frac{1}{2})x+o(x)}-1}{x}=p-\frac{1}{2},$$

故当$p-\frac{1}{2}>1$ 即 $p>\frac{3}{2}$时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+p}}$收敛.

【2601】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}$.

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}$. 由于$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n+1}}=+\infty$,

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}$收敛.

【2602】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n)}$ $(p>0,q>0)$.

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^p\left(1+\frac{q}{n+1}\right)$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^p\left(1+\frac{q}{n+1}\right)-1\right]=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^p\left(1+\frac{qx}{1+x}\right)-1}{x}=p+q,$$

故当 $p+q>1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n)}$ 收敛.

【2603】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^q}$ $(p>0,q>0)$.

提示 注意$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=q+1-p$.

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^q\frac{1+n}{p+n}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^q\frac{1+n}{p+n}-1\right]=\lim_{x\to0}\frac{\frac{(1+x)^{q+1}}{1+px}-1}{x}=q+1-p,$$

故当 $q+1-p>1$ 即 $q>p$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^q}$收敛.

【2604】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right]^p\cdot\frac{1}{n^q}$.

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p\left(\frac{n+1}{n}\right)^q$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left[\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p\left(\frac{n+1}{n}\right)^q-1\right]=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{2+2x}{2+x}\right)^p(1+x)^q-1}{x}=q+\frac{p}{2},$$

故当 $q+\frac{p}{2}>1$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p\cdot\frac{1}{n^q}$ 收敛.

【2605】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\left(1-\frac{x\ln n}{n}\right)^n\quad(p>0)$.

解 令 $a_n=\frac{1}{n^p}\left(1-\frac{x\ln n}{n}\right)^n$. 由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{x\ln n}{n}=0$, 故当 n 充分大时,$a_n>0$.

当 $x=0$ 时,级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$,它当 $p>1$ 时收敛,而当 $p\leqslant1$ 时发散. 当 $x\neq0$ 时,我们有

$$\ln(a_nn^{p+x})=x\ln n+n\ln\left(1-\frac{x\ln n}{n}\right)=nu_n+n\ln(1-u_n)=nu_n^2\cdot\frac{u_n+\ln(1-u_n)}{u_n^2},$$

其中 $u_n=\frac{x\ln n}{n}$, $u_n\neq0\ (n>1)$, $u_n\to0$, $nu_n^2\to0\ (n\to\infty)$. 由洛必达法则,可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n+\ln(1-u_n)}{u_n^2}=\lim_{v\to0}\frac{v+\ln(1-v)}{v^2}=\lim_{v\to0}\frac{1-\frac{1}{1-v}}{2v}=\lim_{v\to0}\frac{1}{2(v-1)}=-\frac{1}{2},$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}\ln(a_nn^{p+x})=0\quad 或\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^{p+x}}}=1.$$

由此可知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+x}}$有相同的敛散性,故当$p+x>1$时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,而当 $p+x\leqslant1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

综上所述,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 仅当 $x>1-p$ 时收敛.

【2606】 证明:若 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$, 且 $\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p$,则 $a_n=o\left(\frac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right)\ (\varepsilon>0)$.

证 下面记 $\alpha_n,\alpha_n',\beta_n,\beta_n',\beta_n'',\varepsilon_n$ 为无穷小量,即

$$\alpha_n=o(1),\alpha_n'=o(1),\beta_n=o(1),\beta_n'=o(1),\beta_n''=o(1),\varepsilon_n=o(1)\ (n\to\infty).$$

由题设知,当 $n\to\infty$时有$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{p}{n}+\frac{\alpha_n}{n}$. 取对数,即得

$$\ln a_n-\ln a_{n+1}=\ln\left(1+\frac{p}{n}+\frac{\alpha_n}{n}\right)=\frac{p}{n}+\frac{\alpha_n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{n}(p+\alpha_n').$$

令 $n=1,2,\cdots,N-1$ 并求和,则得

$$\ln a_1-\ln a_N=\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}(p+\alpha_n').$$

由 143 题(在其中令 $x_N=\sum_{n=1}^{N-1}\frac{\alpha_n'}{n}$, $y_N=\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}$)知

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\left(\sum_{n=1}^{N-1}\frac{\alpha_n'}{n}\right)}{\left(\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}\right)}=\lim_{N\to\infty}\alpha_N'=0.$$

又由 146 题知 $\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}=C+\ln(N-1)+\varepsilon_n$,其中 C 是欧拉常数, $\varepsilon_N\to0$. 于是,令

$$\beta_N=\frac{\left(\sum_{n=1}^{N-1}\frac{\alpha'_n}{n}\right)}{\left(\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}\right)},$$

有

$$\ln a_1-\ln a_N=(p+\beta_N)\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}=(p+\beta_N)[C+\ln(N-1)+\varepsilon_N]=(p+\beta_N)\ln(N-1)+k+\beta'_N,$$

其中 $k=Cp$ 为常数. 于是,

$$\ln a_N=-(p+\beta_N)\ln(N-1)+k'-\beta'_N,$$

其中 $k'=\ln a_1-k$ 为常数,从而,

$$a_N=e^{k'-\beta'_N}(N-1)^{-(p+\beta_N)}=e^{k'-\beta'_N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{-(p+\beta_N)}N^{\beta''_N}N^{-p}.$$

其中 $\beta''_N=-\beta_N$. 由于 $\beta''_N=o(1)$,故对于任给的 $\varepsilon>0$,当 N 充分大时,有 $|\beta''_N|<\frac{\varepsilon}{2}$,从而,$N^{\beta''_N}<N^{\frac{\varepsilon}{2}}$. 再注意到

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{-(p+\beta_N)}=1,$$

即知:当 N 充分大时,有

$$0<a_N\leqslant k''N^{\frac{\varepsilon}{2}}N^{-p}=O\left(\frac{1}{N^{p-\frac{\varepsilon}{2}}}\right),$$

其中 k'' 是常数. 于是,得 $a_N=o\left(\frac{1}{N^{p-\varepsilon}}\right)$. 本题获证.

求出通项 a_n 的减小的阶,从而研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的收敛性:

【2607】 $a_n=\frac{n^p+a_1n^{p-1}+\cdots+a_p}{n^q+b_1n^{q-1}+\cdots+b_q}$,其中 $n^q+b_1n^{q-1}+\cdots+b_q>0$.

提示 注意 $a_n=O^*\left(\frac{1}{n^{q-p}}\right)$.

解 由于 $a_n=O^*\left(\frac{1}{n^{q-p}}\right)$,故当 $q-p>1$ 即 $q>1+p$ 时,级数收敛.

【2608】 $a_n=\frac{1}{n^p}\sin\frac{\pi}{n}$.

提示 注意 $a_n=O^*\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$.

解 由于 $a_n\geqslant0$,且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^p}\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^{p+1}}}=\pi \quad 或 \quad a_n=O^*\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right),$$

故仅当 $1+p>1$ 即 $p>0$ 时,级数收敛.

【2609】 $a_n=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\ln\frac{n-1}{n+1}\quad(n>1)$.

解 由于 $a_n<0$, 且

$$a_n=\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^p\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right)=O^*\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}}\right),$$

故仅当 $\frac{p}{2}+1>1$ 即 $p>0$ 时,级数收敛.

【2610】 $a_n=\ln^p(\sec\frac{\pi}{n})$.

解 由于 $a_n>0$ ($n>2$ 时),且

$$a_n=\frac{1}{2^p}\ln^p\left(1+\tan^2\frac{\pi}{n}\right)\sim\frac{1}{2^p}\tan^{2p}\frac{\pi}{n}\sim\frac{1}{2^p}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2p}=O^*\left(\frac{1}{n^{2p}}\right),$$

故仅当 $2p>1$ 即 $p>\frac{1}{2}$ 时,级数收敛.

【2611】 $a_n=\lg_{b^n}\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}}{n}\right)$ $(a>0,b>0)$.

解 显然 $b\neq1$ (否则 a_n 无意义). 由于

$$a_n=\frac{\ln\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}}{n}\right)}{n\ln b}\sim\frac{1}{\ln b}\cdot\frac{\sqrt[n]{a}}{n^2}=O^*\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

故级数收敛.

【2612】 $a_n=\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^p$.

解 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=e^{n\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O^*\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]}=e^{1-\frac{1}{2n}+O^*\left(\frac{1}{n^2}\right)}$.

由于 $a_n>0$,且

$$a_n=\left[e\left(1-e^{-\frac{1}{2n}+O^*\left(\frac{1}{n^2}\right)}\right)\right]^p\sim e^p\left[\frac{1}{2n}+O^*\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^p=O^*\left(\frac{1}{n^p}\right),$$

故仅当 $p>1$ 时,级数收敛.

【2613】 $a_n=\frac{1}{n^{1+\frac{k}{\ln n}}}$

提示 注意 $a_n=n^{-\left(1+\frac{k}{\ln n}\right)}=O^*\left(\frac{1}{n}\right)$.

解 由于 $a_n=n^{-\left(1+\frac{k}{\ln n}\right)}=e^{-\left(1+\frac{k}{\ln n}\right)\ln n}=e^{-(\ln n+k)}=\frac{1}{n}e^{-k}=O^*\left(\frac{1}{n}\right)$,故级数显然发散.

【2614】 $a_n=\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

提示 注意 $a_n=\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}=O^*\left(\frac{1}{n}\right)$.

解 由于 $a_n=\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}=O^*\left(\frac{1}{n}\right)$,故级数发散.

【2615】 证明:若存在 $\alpha>0$ 使当 $n\geqslant n_0$ 时 $\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\geqslant1+\alpha$ $(a_n>0)$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ $(a_n>0)$ 收敛;若 $n\geqslant n_0$ 时 $\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\leqslant1$,则此级数发散(对数差别法).

证明思路 分别注意 $0<a_n\leqslant\frac{1}{n^{1+\alpha}}$ 及 $a_n\geqslant\frac{1}{n}$,利用比较判别法,命题即获证.

证 若 $\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\geqslant1+\alpha$,则 $\frac{1}{a_n}\geqslant n^{1+\alpha}$ 或 $a_n\leqslant\frac{1}{n^{1+\alpha}}$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}$ 收敛,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

若 $\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\leqslant1$,则 $\frac{1}{a_n}\leqslant n$ 或 $a_n\geqslant\frac{1}{n}$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也发散.

研究具有如下通项的级数的收敛性:

【2616】 $a_n=n^{\ln x}$ $(x>0)$.

提示 利用 2615 题所示的对数差别法.

解 由于

$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n}=\frac{-\ln x \ln n}{\ln n}=-\ln x,$$

故利用 2615 题的对数差别法,即知仅当 $-\ln x>1$ 或 $x<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时,级数收敛.

【2617】 $a_n=\frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}\quad(n>1)$.

解 $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n}=\ln[\ln(\ln n)]$. 对于 $\alpha>0$,显然存在 n_0,使当 $n\geqslant n_0$ 时,$\ln[\ln(\ln n)]\geqslant 1+\alpha$. 故级数收敛.

【2618】 $a_n=\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}\quad(n>1)$.

解 $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n}=\frac{(\ln\ln n)^2}{\ln n}$. 由洛必达法则知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln\ln x)^2}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln\ln x}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\ln x}=0,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\ln\ln n)^2}{\ln n}=0$,从而,存在 n_0,使当 $n\geqslant n_0$ 时,有 $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n}<1$,利用 2615 题的结论,即知级数发散.

利用柯西积分判别法,研究具有如下通项的级数的收敛性:

【2619】 $a_n=\frac{1}{n\ln^p n}$.

解题思路 注意不论 p 为何值,当 x 充分大时,函数 $\frac{1}{x\ln^p x}$ 为非负递减函数,且积分

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^p x}=\begin{cases}\left.\frac{1}{(1-p)\ln^{p-1}x}\right|_2^{+\infty}, & p\neq 1,\\ \left.\ln\ln x\right|_2^{+\infty}, & p=1.\end{cases}$$

解 由于不论 p 为何数,当 x 充分大时,函数 $\frac{1}{x\ln^p x}$ 是非负递减的,并且

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^p x}=\begin{cases}\left.\frac{1}{(1-p)\ln^{p-1}x}\right|_2^{+\infty}, & p\neq 1,\\ \left.\ln\ln x\right|_2^{+\infty}, & p=1\end{cases}$$

仅当 $p>1$ 时收敛,故级数仅当 $p>1$ 时收敛.

【2620】 $a_n=\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}\quad(n>2)$.

解 易知函数 $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}$ (不论 p,q 为何实数)的导数当 x 充分大时是负的,故当 x 充分大时,$f(x)$ 是非负递减函数.

若 $p=1$,则

$$\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x(\ln\ln x)^q}=\begin{cases}\left.\frac{1}{(1-q)(\ln\ln x)^{q-1}}\right|_3^{+\infty}, & q\neq 1,\\ \left.\ln\ln\ln x\right|_3^{+\infty}, & q=1.\end{cases}$$

当 $q>1$ 时收敛，$q\leqslant 1$ 时发散，故由柯西积分判别法知，原级数当 $p=1,q>1$ 时收敛，$p=1,q\leqslant 1$ 时发散。

若 $p\neq 1$，作代换 $\ln x=t$，有

$$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}=\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{dt}{t^p(\ln t)^q}.$$

当 $p>1$ 时，取 $\eta>0$ 使 $p-\eta>1$，由于(不论 q 为何实数)

$$\lim_{t\to+\infty}t^{p-\eta}\frac{1}{t^p(\ln t)^q}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^\eta(\ln t)^q}=0,$$

故积分 $\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{dt}{t^p(\ln t)^q}$ 收敛，从而，原级数收敛；当 $p<1$ 时，取 $\tau>0$ 使 $p+\tau<1$。由于

$$\lim_{t\to+\infty}t^{p+\tau}\frac{1}{t^p(\ln t)^q}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^\tau}{(\ln t)^q}=+\infty,$$

故积分 $\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{dt}{t^p(\ln t)^q}$ 发散。从而，原级数发散。

综上所述，可知原级数仅当 $p=1,\ q>1$ 及 $p>1,q$ 任意时收敛。

【2621】 研究级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$ 的收敛性。

提示 注意 $\ln(n!)<n\ln n$，并利用 2619 题的结果，可知级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散。

解 由于 $\ln(n!)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln k<n\ln n$，故 $\frac{1}{\ln(n!)}>\frac{1}{n\ln n}>0$。

利用 2619 题中 $p=1$ 的结果，知级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散，故级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$ 也发散。

【2622】 证明：设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的项单调递减，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^na_{2^n}$ 同时收敛或同时发散。

证明思路 令 $S_{2^n}=a_1+a_2+\cdots+a_{2^n}$，由不等式

$$0<S_{2^n}<a_1+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{2^n}+\cdots+a_{2^{n+1}-1})<a_1+2a_2+\cdots+2^na_{2^n}$$

和不等式

$$S_{2^n}=a_1+a_2+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2^{n-1}+1}+\cdots+a_{2^n})$$
$$>\frac{1}{2}a_1+a_2+2a_4+\cdots+2^{n-1}a_{2^n}=\frac{1}{2}(a_1+2a_2+2^2a_{2^2}+\cdots+2^na_{2^n})>0,$$

命题即获证。

证 设 $S_{2^n}=a_1+a_2+\cdots+a_{2^n}$，则因 $a_1>a_2>\cdots>a_{2^n}>a_{2^n+1}>\cdots>0$，故得

$$0<S_{2^n}<a_1+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{2^n}+\cdots+a_{2^{n+1}-1})<a_1+2a_2+\cdots+2^na_{2^n}, \tag{1}$$

且有

$$S_{2^n}=a_1+a_2+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2^{n-1}+1}+\cdots+a_{2^n})$$
$$>\frac{1}{2}a_1+a_2+2a_4+\cdots+2^{n-1}a_{2^n}=\frac{1}{2}(a_1+2a_2+2^2a_{2^2}+\cdots+2^na_{2^n})>0. \tag{2}$$

由(1)式得知：若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^na_{2^n}$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛；由(2)式得知：若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^na_{2^n}$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也发散。由此本题获证。

注意 在此命题中，用作比较的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^na_{2^n}$ 可以用更普遍的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}m^na_{m^n}$ 来代替，其中 m 为任一正整数。证法类似。

【2623】 设 $f(x)$ 为单调不增的正值函数。证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 收敛，则对于其余项 $R_n=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}f(k)$ 有以下的估计：

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x<R_n<f(n+1)+\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

利用此式，求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 的和精确到 0.01.

解 由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 的收敛性，根据柯西积分判别法，知积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 由于 $f(x)$ 单调不增，故

$$f(n+k+1)\leqslant\int_{n+k}^{n+k+1} f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(n+k)\quad (k=1,2,3,\cdots).$$

将这些不等式相加，得

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(n+k+1)\leqslant\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=1}^{\infty} f(n+k),$$

即

$$R_n-f(n+1)\leqslant\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\leqslant R_n,$$

或

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\leqslant R_n\leqslant f(n+1)+\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x, \tag{1}$$

这就是所需证的不等式.

最后，利用不等式(1)来求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 的和，精确到 0.01. 易知，当取 $n=8$ 时，即有

$$R_8\leqslant\frac{1}{9^3}+\int_9^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3}<0.008,$$

故取 $\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{k^3}\approx 1.20$ 作为级数和的近似值，即可保证误差不超过 0.01.

注意 原题中将(1)中的“$\leqslant$”误写为“$<$”，这是不对的，例如，若令 $f(x)=\frac{1}{n^2}$，当 $n\leqslant x<n+1$ 时($n=1,2,\cdots$)，则不等式(1)中左端的“$\leqslant$”号成为“$=$”号：

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=R_n=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots;$$

若令 $f(x)=\frac{1}{n^2}$ 当 $n<x\leqslant n+1$ 时($n=1,2,\cdots$)，则不等式(1)中右端的“$\leqslant$”号成为“$=$”号：

$$R_n=f(n+1)+\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots.$$

【2624】 证明叶尔马科夫判别法：设 $f(x)$ 为单调递减的正值函数，且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)}{f(x)}=\lambda.$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 在 $\lambda<1$ 时收敛，在 $\lambda>1$ 时发散.

证 由于 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)}{f(x)}=\lambda$，故对任给的 $\varepsilon>0$，总存在 $N>0$，使当 $x>N$ 时，有

$$\mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)<(\lambda+\varepsilon)f(x).$$

当 $\lambda<1$ 时，取 ε 使 $\lambda+\varepsilon=\rho<1$，则有 $\mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)<\rho f(x)$. 于是，当 $m>N$ 时有

$$\int_N^m \mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x<\rho\int_N^m f(x)\mathrm{d}x,$$

即 $\int_{\mathrm{e}^N}^{\mathrm{e}^m} f(x)\mathrm{d}x<\rho\int_N^m f(x)\mathrm{d}x$，也即

$$(1-\rho)\int_{\mathrm{e}^N}^{\mathrm{e}^m} f(x)\mathrm{d}x<\rho\int_N^m f(x)\mathrm{d}x-\rho\int_{\mathrm{e}^N}^{\mathrm{e}^m} f(x)\mathrm{d}x=\rho\int_N^{\mathrm{e}^N} f(x)\mathrm{d}x-\rho\int_m^{\mathrm{e}^m} f(x)\mathrm{d}x.$$

由于 N 充分大且 $m>N$，故 $m<\mathrm{e}^m$. 又因 $f(x)>0$，故 $\int_m^{\mathrm{e}^m} f(x)\mathrm{d}x>0$. 从而，

$$(1-\rho)\int_{e^N}^{e^m} f(x)\mathrm{d}x<\rho\int_N^{e^N} f(x)\mathrm{d}x,\quad \int_{e^N}^{e^m} f(x)\mathrm{d}x<\frac{\rho}{1-\rho}\int_N^{e^N} f(x)\mathrm{d}x.$$

固定 N，让 $m\to+\infty$，取极限即得

$$\int_{e^N}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{\rho}{1-\rho}\int_N^{e^N} f(x)\mathrm{d}x=\text{常数}.$$

于是，由柯西积分判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛.

当 $\lambda>1$ 时，则取 N 为充分大，可得

$$e^x f(e^x)\geqslant f(x)\quad (x>N).$$

从而，$\int_N^m e^x f(e^x)\mathrm{d}x\geqslant\int_N^m f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_{e^N}^{e^m} f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_N^m f(x)\mathrm{d}x\quad\text{或}\quad \int_{e^N}^{m}+\int_m^{e^m}\geqslant\int_N^{e^N}+\int_{e^N}^{m},$$

故

$$\int_m^{e^m} f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_N^{e^N} f(x)\mathrm{d}x\quad (m>N).$$

今设 $e_0=N+1,\ e_1=e^{e_0},\ e_2=e^{e_1},\ \cdots,\ e_{k+1}=e^{e_k},\cdots$，并分别取 $m=e_0,e_1,e_2,\cdots$，则

$$\int_{e_1}^{e_2} f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_N^{e^N} f(x)\mathrm{d}x,\quad \int_{e_2}^{e_3} f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_N^{e^N} f(x)\mathrm{d}x,\quad\cdots,\quad \int_{e_k}^{e_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_N^{e^N} f(x)\mathrm{d}x,\cdots$$

最后得

$$\int_{e_0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{e_{k-1}}^{e_k} f(x)\mathrm{d}x\geqslant\lim_{n\to\infty} n\int_N^{e^N} f(x)\mathrm{d}x=+\infty,$$

即 $\int_{e_0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散，故由柯西积分判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散.

【2625】 证明罗巴切夫斯基判别法：若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的项单调趋于零，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数 $\sum\limits_{m=0}^{\infty} p_m 2^{-m}$ 同时收敛或同时发散，其中 p_m 是满足不等式

$$a_n\geqslant 2^{-m}\quad (n=1,2,\cdots,p_m)$$

的项 a_n 的最大的序号.

证 由题设 p_m 是满足不等式 $a_n\geqslant 2^{-m}$ 的项 a_n 的最大序号，故有

$$\frac{1}{2^m}\leqslant a_{p_{m-1}+1}<\frac{1}{2^{m-1}},\quad \frac{1}{2^m}\leqslant a_{p_{m-1}+2}<\frac{1}{2^{m-1}},\quad\cdots,\quad \frac{1}{2^m}\leqslant a_{p_m}<\frac{1}{2^{m-1}},\quad a_{p_m+1}<\frac{1}{2^m},$$

于是，

$$a_{p_{m-1}+1}+a_{p_{m-1}+2}+\cdots+a_{p_m}\geqslant(p_m-p_{m-1})\frac{1}{2^m},\tag{1}$$

$$a_{p_{m-1}+1}+a_{p_{m-1}+2}+\cdots+a_{p_m}<(p_m-p_{m-1})\frac{1}{2^{m-1}}.\tag{2}$$

将(1)式及(2)式对 m 从 1 到 N 求和(其中 N 为任意正整数)，得

$$\sum_{m=1}^{N}(a_{p_{m-1}+1}+\cdots+a_{p_m})\geqslant\sum_{m=1}^{N}(p_m-p_{m-1})\frac{1}{2^m},$$

$$\sum_{m=1}^{N}(a_{p_{m-1}+1}+\cdots+a_{p_m})<\sum_{m=1}^{N}(p_m-p_{m-1})\frac{1}{2^{m-1}},$$

由上述两个不等式可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}(p_m-p_{m-1})\frac{1}{2^{m-1}}$ 同时收敛或同时发散. 因此，我们如果能证明级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}(p_m-p_{m-1})\frac{1}{2^{m-1}}$ 与级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty} p_m 2^{-m}$ 同时收敛或同时发散，则命题即获证.

由 $\sum_{m=1}^{\infty} p_m 2^{-m}$ 的收敛性易得 $\sum_{m=1}^{\infty}(p_m-p_{m-1})\frac{1}{2^{m-1}}$ 的收敛性. 反之，若级数 $\sum_{m=1}^{\infty}(p_m-p_{m-1})\frac{1}{2^{m-1}}$ 收敛，则 $\sum_{m=1}^{\infty} p_m 2^{-m}$ 也收敛. 事实上，记 $A=\sum_{m=1}^{\infty}(p_m-p_{m-1})\frac{1}{2^{m-1}}$，由于 $p_m-p_{m-1}\geqslant 0(m=1,2,\cdots)$，故有

$$A\geqslant \sum_{m=1}^{N}(p_m-p_{m-1})\frac{1}{2^{m-1}}=\sum_{m=1}^{N} p_m \frac{1}{2^{m-1}}-\sum_{m=1}^{N} p_{m-1}\frac{1}{2^{m-1}}=\sum_{m=1}^{N} p_m \frac{1}{2^{m-1}}-\sum_{l=0}^{N-1} p_l \frac{1}{2^l}$$

$$=\frac{1}{2^{N-1}}p_N+\sum_{m=1}^{N-1} p_m\left(\frac{1}{2^{m-1}}-\frac{1}{2^m}\right)-p_0=\sum_{m=1}^{N-1} p_m 2^{-m}+\frac{1}{2^{N-1}}p_N-p_0.$$

若记 $S_N=\sum_{m=1}^{N-1} p_m 2^{-m}$，则由上式得

$$S_N=\sum_{m=1}^{N}(p_m-p_{m-1})\frac{1}{2^{m-1}}+p_0-\frac{1}{2^{N-1}}p_N\leqslant p_0+\sum_{m=1}^{N}(p_m-p_{m-1})\frac{1}{2^{m-1}}\leqslant p_0+A.$$

因而数列 $\{S_N\}$ 单调递增且有界，故 $\lim_{N\to+\infty} S_N$ 存在有限，即级数 $\sum_{m=1}^{\infty} p_m 2^{-m}$ 收敛. 证毕.

研究下列级数的收敛性：

【2626】 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^a}$.

提示 注意 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^a}}{\frac{1}{n^{a+\frac{1}{2}}}}=2$.

解 由于 $0<\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^a}=\frac{4}{n^a(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}$，而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n^a(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}}{\frac{1}{n^{a+\frac{1}{2}}}}=2,$$

注意到级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a+\frac{1}{2}}}$ 仅当 $a+\frac{1}{2}>1$(即 $a>\frac{1}{2}$)时收敛，即知原级数仅当 $a>\frac{1}{2}$ 时收敛.

【2627】 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+a}-\sqrt[4]{n^2+n+b})$.

解 利用公式 $\alpha-\beta=\frac{\alpha^4-\beta^4}{(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)}$，得

$$\sqrt{n+a}-\sqrt[4]{n^2+n+b}=\frac{(2a-1)n+a^2-b}{(\sqrt{n+a}+\sqrt[4]{n^2+n+b})(n+a+\sqrt{n^2+n+b})}.$$

由此可知，不论 $a=\frac{1}{2}$ 还是 $a\neq\frac{1}{2}$，当 n 充分大时，上式右端均保持定号，故原级数可当成正项级数处理. 若 $a=\frac{1}{2}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a^2-b}{(\sqrt{n+a}+\sqrt[4]{n^2+n+b})(n+a+\sqrt{n^2+n+b})}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=\frac{a^2-b}{4},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，故原级数收敛；若 $a\neq\frac{1}{2}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2a-1)n+a^2-b}{(\sqrt{n+a}+\sqrt[4]{n^2+n+b})(n+a+\sqrt{n^2+n+b})}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\frac{2a-1}{4}\neq 0,$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散，故原级数发散.

【2628】 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cot\frac{n\pi}{4n-2}-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right)$.

解题思路 注意 $\cot\frac{n\pi}{4n-2}-\sin\frac{n\pi}{2n+1}=\left(\cot\frac{n\pi}{4n-2}-1\right)+\left(1-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right)$.

分别考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cot\frac{n\pi}{4n-2}\right)$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right)$，它们均为正项级数. 由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cot\frac{n\pi}{4n-2}}{\frac{1}{n}}=\frac{\pi}{4}\quad 及\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1-\sin\frac{n\pi}{2n+1}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{\pi^2}{32}.$$

即知原级数发散.

解 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cot\frac{n\pi}{4n-2}-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\cot\frac{n\pi}{4n-2}-1\right)+\left(1-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right)\right]$.

分别考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cot\frac{n\pi}{4n-2}\right)\quad 及\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right),$$

它们都是正项级数. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cot\frac{n\pi}{4n-2}}{\frac{1}{n}}=\frac{\pi}{4},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1-\sin\frac{n\pi}{2n+1}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{\pi^2}{32},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cot\frac{n\pi}{4n-2}\right)$发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right)$ 收敛，从而，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cot\frac{n\pi}{4n-2}-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right)$发散.

【2629】 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right)$.

解题思路 注意当 $x\neq0$ 及 $x>-1$ 时，有 $\ln(1+x)<x$. 于是，可得$\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}$. 从而，

$$0<\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

而

$$\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}}<\frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{2}{\sqrt{n+1}}}<\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}.$$

解 当 $x\neq0$ 及 $-1<x<+\infty$时，有 $\ln(1+x)<x$. 利用上式，即得

$$\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n},\quad \ln\frac{n+1}{n}=-\ln\frac{n}{n+1}=-\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)>\frac{1}{n+1},$$

即

$$\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}.$$

于是，

$$0<\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}}<\frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{2}{\sqrt{n+1}}}<\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}.$$

但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛，故原级数也收敛.

【2630】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n!)}{n^a}$.

解 先设 $a>2$. 利用斯特林公式 $n!=\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}$ $(0<\theta_n<1)$，即得

$$\frac{\ln(n!)}{n^a}=\frac{\ln 2\pi}{2n^a}+\frac{\ln n}{2n^a}+\frac{\ln n}{n^{a-1}}+\frac{\theta_n}{12n^{a+1}}-\frac{1}{n^{a-1}}.$$

显然，当 $a>2$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^a}$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{a-1}}$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\theta_n}{n^{a-1}}$以及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a-1}}$均收敛，故原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n!)}{n^a}$收敛.

现设 $a\leqslant 2$. 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\ln n=+\infty$，利用 139 题的结果可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n}=+\infty,$$

从而，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln(n!)}{n^a}}{\frac{1}{n^{a-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n}=+\infty,$$

再注意到此时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a-1}}$发散，即知原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n!)}{n^a}$发散.

【2631】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt[3]{n}}$.

解题思路 *注意当 t 充分大时，有 $e^t\geqslant At^4$（A 为正常数），故存在正整数 n_0，使当 $n\geqslant n_0$ 时，有*

$$e^{\sqrt[3]{n}}\geqslant An^{\frac{4}{3}} \quad 或 \quad 0<e^{-\sqrt[3]{n}}\leqslant\frac{1}{A}n^{-\frac{4}{3}},$$

利用比较判别法即可获解. 利用拉比判别法也可获解.

解 解法 1：利用拉比判别法.

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\left(e^{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}-1\right)=\frac{e^{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}-1}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}\cdot n(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}).$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}=+\infty,$$

利用$\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$，即得$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=+\infty$，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt[3]{n}}$收敛.

解法 2：当 t 充分大时，有 $e^t\geqslant At^4$（A 为大于零的常数），故存在 n_0，使当 $n\geqslant n_0$ 时，有 $e^{\sqrt[3]{n}}\geqslant An^{\frac{4}{3}}$. 从而，

$$0<e^{-\sqrt[3]{n}}\leqslant\frac{1}{A}n^{-\frac{4}{3}}.$$

但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{4}{3}}$收敛，故原级数收敛.

【2632】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2e^{-\sqrt{n}}$.

解题思路 *注意当 t 充分大时，有 $e^t\geqslant Bt^7$（B 为正常数），并仿 2631 题解法 2.*

解 当 t 充分大时，有 $e^t\geqslant Bt^7$（$B>0$ 为常数），故存在 n_0，使当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$0<n^2e^{-\sqrt{n}}\leqslant\frac{1}{B}n^{-\frac{7}{2}+2}=\frac{1}{B}n^{-\frac{3}{2}}.$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}}$ 收敛，故原级数收敛.

【2633】 $\sum_{n=1}^{\infty}(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1)$.

解题思路 注意 $a_n=n^{\frac{1}{n^2+1}}-1=e^{\frac{\ln n}{n^2+1}}-1\sim\frac{\ln n}{n^2+1}\sim\frac{\ln n}{n^2}$. 又存在正整数 n_0，使当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$0<\frac{\ln n}{n^2}\leqslant\frac{A}{n^{\frac{3}{2}}}\quad(A\text{ 为正常数}).$$

利用比较判别法即可获解.

解 $a_n=n^{\frac{1}{n^2+1}}-1=e^{\frac{\ln n}{n^2+1}}-1\sim\frac{\ln n}{n^2+1}\sim\frac{\ln n}{n^2}$. 又由于存在 n_0，使当 $n\geqslant n_0$ 时，有 $0<\frac{\ln n}{n^2}\leqslant\frac{A}{n^{\frac{3}{2}}}$ ($A>0$，常数)，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$ 收敛，从而，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1)$ 收敛.

【2634】 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{a\ln n+b}{c\ln n+d}}$.

解 先设 $c\neq0$. 若 $bc-ad\neq0$，应用拉比判别法，我们有

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\left[e^{\frac{a\ln n+b}{c\ln n+d}-\frac{a\ln(n+1)+b}{c\ln(n+1)+d}}-1\right]=n\left\{e^{\frac{(bc-ad)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(c\ln n+d)[c\ln(n+1)+d]}}-1\right\}$$

$$=\frac{e^{\frac{(bc-ad)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(c\ln n+d)[c\ln(n+1)+d]}}-1}{\frac{(bc-ad)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(c\ln n+d)[c\ln(n+1)+d]}}\cdot\frac{(bc-ad)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{(c\ln n+d)[c\ln(n+1)+d]}.$$

当 $n\to\infty$ 时，上述等式右端的第一个因子趋于 1，第二个因子趋于 $bc-ad$，第三个因子趋于零，因此，

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=0.$$

从而，级数发散；若 $bc-ad=0$，此时 $a_n=$ 常数 >0 $(n=1,2,\cdots)$，故级数发散. 若 $c=0$，则

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\frac{e^{-\frac{a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{d}}-1}{-\frac{a}{d}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\cdot\left(-\frac{a}{d}\right)\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\to-\frac{a}{d}\quad(d\neq0).$$

于是，如果 $-\frac{a}{d}>1$ 即 $\frac{a}{d}<-1$，则级数收敛；如果 $-\frac{a}{d}<1$，则级数发散；若 $-\frac{a}{d}=1$，则 $a_n=\frac{C}{n}$ ($C>0$ 是常数)，从而，级数发散.

【2635】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^2\left(\sin\frac{1}{n}\right)}$.

解 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^2\frac{1}{n}}$. 由于

$$\frac{\frac{1}{\ln^2\frac{1}{n}}}{\frac{1}{\ln^2\left(\sin\frac{1}{n}\right)}}=\left(\frac{\ln\sin\frac{1}{n}}{\ln\frac{1}{n}}\right)^2\quad\text{并且}\quad\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\sin\frac{1}{n}}{\ln\frac{1}{n}}=\lim_{x\to+0}\frac{\ln\sin x}{\ln x}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}}=1,$$

故

$$\frac{1}{\ln^2\left(\sin\frac{1}{n}\right)}\sim\frac{1}{\ln^2\frac{1}{n}}=\frac{1}{\ln^2 n}.$$

又当 $n>1$ 时，$0<\ln n<\sqrt{n}$，故 $\frac{1}{\ln^2 n}>\frac{1}{n}$. 由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}$ 发散，从而，原级数发散.

【2636】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}$.

解 若 $a=0$. 级数显然发散.

若 $a\neq 0$. 由于

$$\sqrt[n]{a_n}=\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^2}=e^{n^2\ln\cos\frac{a}{n}}=e^{n^2\ln\left[1-\frac{a^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right]}=e^{n^2\left[-\frac{a^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right]}=e^{-\frac{a^2}{2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=e^{-\frac{a^2}{2}}<1$，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}$ 当 $a\neq 0$ 时收敛.

【2637】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)$.

解

$$a_n=\ln\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)=\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\ln\left[1+\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}-1\right)\right]^{\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}},$$

其中 $\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}-1\to 0$（当 $n\to\infty$ 时）. 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch}\pi x-\cos\pi x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\pi\operatorname{sh}\pi x+\pi\sin\pi x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\pi^2\operatorname{ch}\pi x+\pi^2\cos\pi x}{2}=\pi^2,$$

故得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}}{\frac{1}{n^2}}\cdot\ln\left[1+\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}-1\right)\right]^{\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\ln\left[1+\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}-1\right)\right]^{\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}}$$

$$=1\cdot\pi^2\cdot 1=\pi^2,$$

故存在常数 $k>0$，有 $\left|\frac{a_n}{\frac{1}{n^2}}\right|\leqslant k$（$n$ 充分大），即 $|a_n|\leqslant k\cdot\frac{1}{n^2}$，由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故原级数收敛.

【2638】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$.

解 由于 $n!>\left(\frac{n}{e}\right)^{n}$ *)，故有

$$\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}>\frac{1}{e^n}n^{n-\sqrt{n}}=b_n.$$

但 $\sqrt[n]{b_n}=\frac{1}{e}n^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}\to\infty$（当 $n\to\infty$ 时），因此，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，从而，原级数发散.

*） 利用 74 题的结论.

【2639】 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

解 $a_n=\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}=\frac{e^{(\ln n)^2}}{e^{n\ln(\ln n)}}=e^{-[n\ln(\ln n)-\ln^2 n]}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln(\ln n)-\ln^2 n}{n}=+\infty,$$

故存在 n_0，使当 $n\geqslant n_0$ 时，有 $n\ln(\ln n)-\ln^2 n\geqslant An$，其中 A 为大于零的常数，从而，有

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n^2}}=\frac{n^2}{e^{n\ln(\ln n)-\ln^2 n}}\leqslant\frac{n^2}{e^{An}}\to 0 \quad (\text{当 } n\to\infty\text{时}),$$

于是，级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$收敛.

【2640】 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a^{\frac{1}{n}}-\frac{b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{2}\right)$ $(a>0,b>0,c>0)$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{n}}-\frac{b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{2}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}-\frac{1}{2}\left(\frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}+\frac{c^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right)\right]=\ln a-\frac{1}{2}(\ln b+\ln c)=\ln\frac{a}{\sqrt{bc}}.$$

当 $a\neq\sqrt{bc}$时 $\ln\frac{a}{\sqrt{bc}}\neq 0$，且当 n 充分大时，级数的项不变号，故当 $a\neq\sqrt{bc}$时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a^{\frac{1}{n}}-\frac{b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{2}\right)$ 发散.

当 $a=\sqrt{bc}$时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{(b^{\frac{1}{2n}}-c^{\frac{1}{2n}})^2}{2}\right]$. 由于当 $n\to\infty$时，有

$$\frac{\frac{(b^{\frac{1}{2n}}-c^{\frac{1}{2n}})^2}{2}}{\frac{1}{n^2}}\to\frac{1}{8}(\ln b-\ln c)^2,$$

并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{\left(b^{\frac{1}{2n}}-c^{\frac{1}{2n}}\right)^2}{2}\right]$收敛，即当$a=\sqrt{bc}$时，原级数收敛.

【2641】 $\sum_{n=1}^{\infty}(n^{n^{\alpha}}-1)$.

解 当 $\alpha\geqslant 0$ 时，$a_n=n^{n^{\alpha}}-1\to\infty$ (当 $n\to\infty$时)，故级数发散.

当 $-1\leqslant\alpha<0$ 时，由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{x^{\alpha}}-1}{\frac{1}{x^{|\alpha|}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln x}{x^{|\alpha|}}}-1}{\frac{1}{x^{|\alpha|}}}=\lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{e^{\frac{\ln x}{x^{|\alpha|}}}\left(\frac{1}{x^{|\alpha|+1}}-|\alpha|\frac{\ln x}{x^{|\alpha|+1}}\right)}{-|\alpha|\frac{1}{x^{|\alpha|+1}}}\right\}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{x^{|\alpha|}}}(\ln x-|\alpha|^{-1})=+\infty,$$

故对于 $a_n=n^{n^{\alpha}}-1$，当 $n\to\infty$时，有$\frac{a_n}{\frac{1}{n^{|\alpha|}}}\to\infty$. 因此，存在常数 $k>0$，使 $a_n\geqslant k\cdot\frac{1}{n^{|\alpha|}}$，但当$|\alpha|\leqslant 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{|\alpha|}}$ 发散，从而，当$-1\leqslant\alpha<0$ 时，原级数发散

当 $\alpha<-1$ 时，取 β 使 $\alpha<\beta<-1$，于是，$|\alpha|>|\beta|>1$. 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{x^{\alpha}}-1}{\frac{1}{x^{|\beta|}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln x}{x^{|\alpha|}}}-1}{\frac{1}{x^{|\beta|}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln x}{x^{|\alpha|}}}\left(\frac{1}{x^{|\alpha|+1}}-|\alpha|\cdot\frac{\ln x}{x^{|\alpha|+1}}\right)}{-|\beta|\frac{1}{x^{|\beta|+1}}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x^{|\alpha|}}}\left(\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|\frac{\ln x}{x^{|\alpha|-|\beta|}}-\frac{1}{|\beta|}\cdot\frac{1}{x^{|\alpha|-|\beta|}}\right)=0,$$

故有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\frac{1}{n^{|\beta|}}}=0$,但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{|\beta|}}$收敛,从而,当 $\alpha<-1$ 时,原级数收敛.

【2642】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\ln\dfrac{1}{n^a}-\ln\left(\sin\dfrac{1}{n^a}\right)\right]$.

解 $a_n=\ln\dfrac{1}{n^a}-\ln\left(\sin\dfrac{1}{n^a}\right)$. 显然必须设 $a\geqslant0$. 因若 $a<0$,则对于某些 n, $\ln(\sin n^{-a})$可能无意义. 当 $a=0$时,$a_n=-\ln\sin1=$常数>0 $(n=1,2,\cdots)$,故此时级数发散,当 $a>0$ 时,将 a_n 改写为

$$a_n=\ln\frac{\frac{1}{n^a}}{\sin\frac{1}{n^a}}=\ln\left[1+\left(\frac{\frac{1}{n^a}}{\sin\frac{1}{n^a}}-1\right)\right]=\left(\frac{\frac{1}{n^a}}{\sin\frac{1}{n^a}}-1\right)\ln\left[1+\left(\frac{\frac{1}{n^a}}{\sin\frac{1}{n^a}}-1\right)\right]^{\frac{\sin\frac{1}{n^a}}{\frac{1}{n^a}-\sin\frac{1}{n^a}}}$$

由于

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^a}{\sin x^a}-1}{x^{2a}}=\lim_{y\to0}\frac{\frac{y}{\sin y}-1}{y^2}=\lim_{y\to0}\frac{y-\sin y}{y^2\sin y}=\lim_{y\to0}\frac{y-\sin y}{y^3}=\lim_{y\to0}\frac{1-\cos y}{3y^2}=\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{6y}=\frac{1}{6},$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^{2a}}}=\frac{1}{6}.$$

从而得知:当 $2a>1$ 即 $a>\dfrac{1}{2}$时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;而当 $2a\leqslant1$ 即 $a\leqslant\dfrac{1}{2}$时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

【2643】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^{-(b\ln n+c\ln^2 n)}$ $(a>0)$.

解 $a_n=a^{-(b\ln n+c\ln^2 n)}$. 当 $a=1$ 时,显然 $a_n=1$,因而,级数发散. 当 $a\neq1$ 时,考虑

$$\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=(b+c\ln n)\ln a.$$

利用 2615 题的结果(对数差别法),即知:

(1) 当 $c=0$, $b\ln a>1$,即 $a^b>e$ 时,原级数收敛;而当$c=0$, $b\ln a\leqslant1$,即 $a^b\leqslant e$ 时,原级数发散.

(2) 当 $c\neq0$, $c\ln a>0$,即 $a^c>1$ 时,原级数收敛;而当 $c\neq0$, $c\ln a<0$ 即 $a^c<1$ 时,原级数发散.

综上所述,仅当 $c=0$, $a^b>e$ 及 $a^c>1$ 时,原级数收敛.

【2644】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}$ $(a>0,b>0)$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}}{\frac{1}{n^{a+b}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2n+a+b}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+b}\left(1+\frac{b}{n}\right)^{n+a}}$$

$$=\frac{1}{e^a\cdot e^b}=e^{-(a+b)},$$

故当 $a+b>1$ 时,级数收敛;而当 $a+b\leqslant1$ 时,级数发散.

【2645】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{[(n+1)!]^n}{2!\cdot4!\cdots(2n)!}$.

解 $a_n=\dfrac{[(n+1)!]^n}{2!\cdot4!\cdots(2n)!}$. 由于

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+2)^n}{(n+3)\cdots(2n+2)}<\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n=\left[\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2-2}\right]^{-1}\to\frac{1}{e}<1\quad(\text{当 }n\to+\infty\text{时}),$$

于是，由 2592 题的结论知，原级数收敛.

研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛性，其通项如下：

【2646】 $u_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^2}$.

提示 注意 $0<u_n\leqslant\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{n^{-\frac{1}{2}}dx}{1}=n^{-\frac{3}{2}}$.

解 由于 $0<u_n\leqslant\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{n^{-\frac{1}{2}}}{1}dx=n^{-\frac{3}{2}}$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{3}{2}}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

【2647】 $u_n=\dfrac{1}{\int_0^n\sqrt[4]{1+x^4}\,dx}$.

提示 注意 $0<u_n\leqslant\dfrac{1}{\int_0^n x\,dx}=\dfrac{2}{n^2}$.

解 由于 $0<u_n\leqslant\dfrac{1}{\int_0^n x\,dx}=\dfrac{2}{n^2}$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

【2648】 $u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x}dx$.

提示 注意 $u_n\geqslant\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\sin^2 x\,dx=\frac{1}{2(n+1)}>0$.

解 由于 $u_n\geqslant\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\sin^2 x\,dx=\frac{1}{2(n+1)}>0$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

【2649】 $u_n=\int_n^{n+1}e^{-\sqrt{x}}dx$.

提示 注意 $0<u_n\leqslant e^{-\sqrt{n}}$，可证级数 $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt{n}}$ 收敛.

解 由于 $0<u_n\leqslant e^{-\sqrt{n}}$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt{n}}$ 是收敛的*)，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

*) 事实上，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{-\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{e^{\sqrt{n}}}=0$，利用比较判别法即获证.

【2650】 $u_n=\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin^3 x}{1+x}dx$.

提示 注意 $\sin^3 x$ 在 $(0,\frac{\pi}{n})$ $(n\geqslant2)$ 内是单调递增的，故有 $0\leqslant u_n\leqslant\dfrac{\sin^3\frac{\pi}{n}}{1+0}\cdot\dfrac{\pi}{n}\leqslant\left(\dfrac{\pi}{n}\right)^4$ $(n\geqslant2)$.

解 由于函数 $\sin^3 x$ 在 $(0,\frac{\pi}{n})$ $(n\geqslant2)$ 内是单调递增的，故有

$$0\leqslant u_n\leqslant\frac{\sin^3\frac{\pi}{n}}{1+0}\cdot\frac{\pi}{n}\leqslant\left(\frac{\pi}{n}\right)^4\quad(n\geqslant2).$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-4}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

【2651】 $u_n=\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!}$.

解 由于

$$0<u_n\leqslant\frac{n\cdot n!}{n!(n+1)\cdots(2n)}=\frac{n}{(n+1)\cdots(2n)}<\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}\quad(\text{当 } n \text{ 足够大}),$$

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}$收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

【2652】 $u_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln^2 k}{n^{\alpha}}$.

解 首先，我们证明：当 $\alpha>2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛. 事实上，

$$0<u_n\leqslant\frac{n\ln^2 n}{n^{\alpha}}=\frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1}},$$

取 $\delta>0$ 使 $\alpha-1-\delta>1$，由于$\frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1}}=\frac{\frac{\ln^2 n}{n^{\delta}}}{n^{\alpha-1-\delta}}$，而$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{n^{\delta}}=0$，故当 n 充分大时，有

$$\frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1}}\leqslant\frac{C}{n^{\alpha-1-\delta}}\quad(C\text{ 为正的常数}).$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha-1-\delta}}$收敛，故当 $\alpha>2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

其次，我们证明：当 $\alpha\leqslant 2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散. 事实上，当 n 充分大时，有

$$u_n\geqslant\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n^2}=\frac{\ln n!}{n^2}.$$

因为当 $1\leqslant r\leqslant n$ 时，$(n-r)(r-1)\geqslant 0$，故有 $r(n-r+1)\geqslant n$. 令

$$r=1,\text{ 得 }1\cdot n=n;\quad r=2,\text{ 得 }2(n-1)\geqslant n;\quad\cdots;\quad r=n,\text{ 得 }n\cdot 1=n.$$

连乘得

$$(n!)^2\geqslant n^n\quad\text{或}\quad n!\geqslant n^{\frac{n}{2}}.$$

利用上述不等式，可得

$$u_n\geqslant\frac{\ln n^{\frac{n}{2}}}{n^2}=\frac{\ln n}{2n}>\frac{1}{n}>0\quad(\text{当 }n\geqslant n_0\text{ 时}),$$

从而，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

用相应的级数来代替数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$，然后研究它们的收敛性，设：

【2653】 $x_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$.

解题思路 注意

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=-\frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2}=O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

解 $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$

$$=-\frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2}=O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛，记 $x_0=0$，故 $x_n=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})$当 $n\to\infty$时的极限存在，即数列$\{x_n\}$收敛.

【2654】 $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}-\frac{(\ln n)^2}{2}$.

解 $x_n-x_{n-1}=\frac{\ln n}{n}-\frac{1}{2}\{(\ln n)^2-[\ln(n-1)]^2\}=\frac{\ln n}{n}-\frac{1}{2}\ln\frac{n}{n-1}\cdot\ln[n(n-1)]$

$$=\frac{\ln n}{n}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\left[\ln n^2+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{\ln n}{n}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\left[2\ln n-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=\frac{\ln n}{n}-\left[\frac{\ln n}{n}+O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right]=O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

考虑级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(x_n-x_{n-1})$. 由级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$ 的收敛性可知级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(x_n-x_{n-1})$ 收敛，于是，

$$x_n=\sum_{k=2}^{n}(x_k-x_{k-1})$$

当 $n\to\infty$ 时的极限存在，即数列 $\{x_n\}$ 收敛.

【2655】 对于下列级数

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$； (2)[+] $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)!}$*； (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}$,

大约应取多少项来求级数的和方可精确到 10^{-5}.

解 (1) 余项

$$R_N=\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}=\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{N}.$$

要精确到 10^{-5}，只要 $\frac{1}{N}<10^{-5}$，即只要 $N>10^5=100000$.

(2) 余项 $R_N=\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)!}$. 利用 74 题的不等式 $k!>\left(\frac{k}{e}\right)^k(k=1,2,\cdots)$，于是，当 $n\geqslant N+1$，有

$$\frac{2^n}{(n+1)!}<2^n\left(\frac{e}{n+1}\right)^{n+1}=\frac{1}{n+1}\left(\frac{2e}{n+1}\right)^n\leqslant\frac{1}{N+2}\left(\frac{2e}{N+2}\right)^n=\frac{1}{2e}\left(\frac{2e}{N+2}\right)^{N+2}\left(\frac{2e}{N+2}\right)^{n-(N+1)}.$$

因此得

$$R_N<\frac{1}{2e}\left(\frac{2e}{N+2}\right)^{N+2}\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{2e}{N+2}\right)^{n-(N+1)}=\frac{1}{2e}\left(\frac{2e}{N+2}\right)^{N+2}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{2e}{N+2}\right)^{l}.$$

取 $N\geqslant4$，则 $\frac{2e}{N+2}<1$，此时又有

$$R_N<\frac{1}{2e}\left(\frac{2e}{N+2}\right)^{N+2}\frac{1}{1-\frac{2e}{N+2}}.$$

取 $N=11$，则有 $R_N=\frac{1}{2e}\left(\frac{2e}{13}\right)^{13}\frac{1}{1-\frac{2e}{13}}=\Delta_N$. 利用对数对于 Δ_N 作数值计算，有

$$\Delta_N\leqslant\frac{13}{15.126e}\left(\frac{2e}{13}\right)^{13}\approx10^{-5.42266}<10^{-5},$$

即此级数取 $N\geqslant11$ 项求和就可保证精确到 10^{-5}.

(3) 余项 $R_N=\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}$. 仍用不等式 $k!>\left(\frac{k}{e}\right)^k(k=1,2,\cdots)$，则有

$$R_N<\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{e}{2n-1}\right)^{2n-1}\leqslant\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{e}{2N+1}\right)^{2n-1}=\left(\frac{e}{2N+1}\right)^{2N+1}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{e}{2N+1}\right)^{2l}.$$

取 $N\geqslant1$，则 $\frac{e}{2N+1}<1$，故有

$$R_N<\left(\frac{e}{2N+1}\right)^{2N+1}\frac{1}{1-\left(\frac{e}{2N+1}\right)^2}.$$

今取 $N=5$，则有 $$R_N<\left(\frac{e}{11}\right)^{11}\frac{121}{113.614}\approx10^{-6.6374}<10^{-5}.$$

则此级数取 $N\geqslant5$ 项求和就可保证精确到 10^{-5}.

---

* 题号上角带“+”号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致，以后不再说明，中译本基本是按俄文第二版翻译的，俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正.

§ 2. 变号级数收敛性的判别法

1° **级数的绝对收敛性** 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

称为**绝对收敛**,若

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{2}$$

收敛. 这时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛,绝对收敛级数的和与各项相加的顺序无关.

要确定级数(1)的绝对收敛性,只需把对于同号级数收敛性的已知判别法应用于级数(2)即可.

若级数(1)收敛,而级数(2)发散,则称级数(1)为*条件收敛(非绝对收敛)*. 通过改变各项的顺序,可使条件收敛级数的和等于任何数(*黎曼定理*).

2° **莱布尼茨判别法** 若交错级数

$$b_1 - b_2 + b_3 - \cdots + (-1)^{n-1} b_n + \cdots \quad (b_n \geqslant 0)$$

满足条件 1) $b_n \geqslant b_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$ 和 2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$,则该级数收敛(一般说来,非绝对收敛). 在这种情形下,对于级数的余项

$$R_n = (-1)^n b_{n+1} + (-1)^{n-1} b_{n+2} + \cdots$$

有以下的估计

$$R_n = (-1)^n \theta_n b_{n+1} \quad (0 \leqslant \theta_n \leqslant 1).$$

3° **阿贝尔判别法** 若:1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;2) 数 b_n $(n=1,2,\cdots)$ 构成单调有界数列,则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{3}$$

收敛.

4° **狄利克雷判别法** 若:1) 全体部分和 $A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ 是有界的;2) 当 $n \to \infty$ 时 b_n 单调地趋近于零,则级数(3)收敛.

【2656】 证明:可把非绝对收敛级数的各项在不变更其顺序的情况下分群组合起来,使所得的新级数绝对收敛.

证 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为一收敛而非绝对收敛的级数. 利用柯西准则,即知:

对于给定的 $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$,存在 N_1,使对于任意正整数 m_1,有 $|a_{N_1+1} + \cdots + a_{N_1+m_1}| < \varepsilon_1$;

对于给定的 $\varepsilon_2 = \frac{1}{2^2}$,存在 N_2(可取 $N_2 > N_1$),使对于任意正整数 m_2,有 $|a_{N_2+1} + \cdots + a_{N_2+m_2}| < \varepsilon_2$;

$$\vdots$$

对于给定的 $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$,存在 N_k(可取 $N_k > N_{k-1}$),使对于任意正整数 m_k,有 $|a_{N_k+1} + \cdots + a_{N_k+m_k}| < \varepsilon_k$;

$$\vdots$$

令

$$A_0 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1}, \quad A_1 = a_{N_1+1} + a_{N_1+2} + \cdots + a_{N_2}, \quad \cdots \quad A_k = a_{N_k+1} + a_{N_k+2} + \cdots + a_{N_{k+1}}, \quad \cdots$$

则有 $|A_k| < \varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$ $(k=1,2,\cdots)$,且 $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ 是原级数的各项在不变更其顺序的情况下分群组合起来所得

的新级数. 由于

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

收敛，故级数 $\sum_{k=0}^{\infty} |A_k|$ 收敛，即级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ 绝对收敛. 证毕.

【2657】 设有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，若：(1)当 $n\to\infty$ 时，此级数的通项 a_n 趋于零；(2)在不变更原有顺序的情况下分别组合该级数的各项，所得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛；(3)在项 $A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i$ $(1=p_1<p_2<\cdots)$ 中相加项 a_i 的数目是有界的，证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收敛的.

证 设 A_n 中相加项的数目不超过某一固定的正整数 m，即

$$p_{n+1}-p_n \leqslant m \quad (n=1,2,\cdots).$$

任给 $\varepsilon>0$，考虑 $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2m+1}>0$. 由 $a_n\to 0$（当 $n\to\infty$ 时），故存在 N'，使当 $n\geqslant N'$ 时，有 $|a_n|<\varepsilon_1$. 再由 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 的收敛性知，存在 $N_1\geqslant N'$，使当 $n\geqslant N_1$ 及 p 为任意正整数时，有

$$|A_n+A_{n+1}+\cdots+A_{n+p}|<\varepsilon_1.$$

今取 $N=p_{N_1}$，当 $n\geqslant N$ 时，对任意正整数 s，考察 $\Delta_{n,s}=a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+s}$，注意每一个 a_i 必属于某一个 A_k. 记 A_n 内各项 a_i 元素的集合为 $\widetilde{A}_n$，即知：当 $i<j$ 时，若 $a_i\in\widetilde{A}_k$，$a_j\in\widetilde{A}_l$，则必有 $k\leqslant l$. 今在 $\Delta_{n,s}$ 中看各项，显然 $a_n\in\widetilde{A}_{N_1+r}$ $(r\geqslant 0)$. 再看以后各项，便有

$$\Delta_{n,s}=B+A_{N_1+r+1}+\cdots+A_{N_1+r+q}+B',$$

其中 $B=a_n+\cdots+a_{p_{N_1+r+1}}-1$，$B'=a_{p_{N_1+r+q+1}}+\cdots+a_{n+s}$. 很明显，$B$ 是 A_{N_1+r} 中一部分项之和，B' 是 $A_{N_1+r+q+1}$ 中一部分项之和，于是（注意 $n\geqslant N\geqslant N_1\geqslant N'$），

$$|B|\leqslant(p_{N_1+r+1}-p_{N_1+r})\varepsilon_1\leqslant m\varepsilon_1,$$

$$|B'|\leqslant(p_{N_1+r+q+2}-p_{N_1+r+q+1})\varepsilon_1\leqslant m\varepsilon_1,$$

$$|A_{N_1+r+1}+\cdots+A_{N_1+r+q}|<\varepsilon_1,$$

从而（当 $n\geqslant N$，s 为任何正整数），

$$|\Delta_{n,s}|\leqslant|B|+|A_{N_1+r+1}+\cdots+A_{N_1+r+q}|+|B'|<(2m+1)\varepsilon_1=\varepsilon.$$

根据柯西收敛准则即知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 证毕.

【2658】 证明：若将收敛级数的各项重新排列，使每一项离开原有的位置不超过 m 个位置（m 为预先给定的数），则级数的和不变.

证 设原收敛级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，当然有 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$. 又记重排出的新级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$，再记 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的前 N 项部分和为 $S_N=\sum_{n=1}^{N} a_n$，记 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的前 N 项部分和为 $\sigma_N=\sum_{n=1}^{N} b_n$. 当然有 $\lim_{N\to\infty} S_N=S$. 今证 σ_N 的极限也存在，且等于 S.

考察 σ_N 与 S_N 之差

$$\Delta_N=\sigma_N-S_N.$$

任给 $\varepsilon>0$，取 $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2m}>0$，则存在 N_1，使当 $n\geqslant N_1$ 时，有 $|a_n|<\varepsilon_1$. 今取

$$N\geqslant N_1+2m,$$

又记 S_k 内各 a_n 项元素集合为 $\widetilde{S}_k$，记 σ_k 内各 b_n 项元素集合为 $\widetilde{\sigma}_k$，则有

$$\Delta_N=\sum_{b_n\in\widetilde{\sigma}_N} b_n-\sum_{a_n\in\widetilde{S}_N} a_n.$$

今从 a_1 查起，看 $a_1,a_2,\cdots$ 至 a_N，注意每一个 a_i 被重排成 b_j 时，i 与 j 的标号差不超过 m. 因此，对每一个 a_i 总可以在 b_i 的前后各不超过 m 个元素内找到一个 $b_j=a_i$. 反过来，从 b_1 查起，看 $b_1,b_2,\cdots$ 至 b_N，对每一个 b_j 总可以在 a_j 的前后各不超过 m 个元素内找到一个 $a_i=b_j$. 但也可能且只有那种可能：最后一段不超过个 m 元素的 a_i，即 $a_N,a_{N-1},\cdots,a_{N-m}$ 之内若干个元素可能被迁到 b_N 之后，从而，在 $\widetilde{\sigma}_N$ 内找不到搬迁元素，但个数(设为 r 个)不超过 m. 同样，也有可能最后一段不超过 m 个元素的 b_j，即 $b_N,b_{N-1},\cdots,b_{N-m}$ 之内若干个元素在 $\widetilde{S}_n$ 内找不到搬迁元素，但个数(设为 s 个)不超过 m. 除此之外均有对应的搬迁元素且一一对应. 于是，

$$|\Delta_N|=\left|\sum_{\substack{b_n\in\widetilde{\sigma}_N\\ b_n\overline{\in}\widetilde{S}_N}} b_n-\sum_{\substack{a_n\in\widetilde{S}_N\\ a_n\overline{\in}\widetilde{\sigma}_N}} a_n\right|\leqslant\sum_{\substack{b_n\in\widetilde{\sigma}_N\\ b_n\overline{\in}\widetilde{S}_N}}|b_n|+\sum_{\substack{a_n\in\widetilde{S}_N\\ a_n\overline{\in}\widetilde{\sigma}_N}}|a_n|<s\varepsilon_1+r\varepsilon_1\leqslant m\varepsilon_1+m\varepsilon_1=\varepsilon.$$

上式中 a_n 的下标 $n\geqslant N_1+m>N_1$，故 $|a_n|<\varepsilon$. 而 b_n 的下标 $n\geqslant N_1+m$，记住 b_n 由某 a_i 搬迁而来，其下标 i 在 n 的前后距离不超过 m，故此时 $i\geqslant N_1$，因而，此时 $|b_n|=|a_i|<\varepsilon_1$. 从而上述不等式是成立的. 由极限定义知

$$\lim_{N\to\infty}\Delta_N=0,\quad 也即有\quad \lim_{N\to\infty}\sigma_N=\lim_{N\to\infty}S_N=S.$$

从而，命题得证.

证明下列级数的收敛性并求它们的和：

【2659】 $1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}+\cdots$.

证明思路 注意

$$S_n=1-\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}-\frac{7}{2^3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}},$$

及 $$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}-\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{2n-3}{2^{n-1}}+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^n},$$

两式相加，可得 $3S_n=\dfrac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}+(-1)^{n-1}\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}$.

解 $$S_n=1-\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}-\frac{7}{2^3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}},$$

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}-\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}-\cdots+(-1)^{n-2}\frac{2n-3}{2^{n-1}}+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^n},$$

将上面两式相加，得

$$\frac{3}{2}S_n=1-\frac{2}{2}+\frac{2}{2^2}-\frac{2}{2^3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2}{2^{n-1}}+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^n}.$$

于是，

$$\begin{aligned}3S_n&=2-2+\frac{2}{2}-\frac{2}{2^2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2}{2^{n-2}}+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}}\\&=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}}\to\frac{2}{3}\quad(当\ n\to\infty时),\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{2}{9}$. 因此，原级数收敛，且其和为 $\frac{2}{9}$.

【2660】 $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\cdots$.

证明思路 显然该级数绝对收敛，从而它是收敛的，记其和为 S. 可考虑一个特殊的部分和

$$S_{3n}=\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\cdots+\frac{1}{2^{3n-3}}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{3n-2}}\right)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^8}+\cdots+\frac{1}{2^{3n-1}}\right)$$

$$=\frac{5}{4}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}}.$$

解 显然该级数绝对收敛，从而，它是收敛的，记其和为 S. 考虑一个特殊的部分和

$$S_{3n}=\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\cdots+\frac{1}{2^{3n-3}}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{3n-2}}\right)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2^{3n-1}}\right)$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}}-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}}=\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}\right)\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}}=\frac{5}{4}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}},$$

故得 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_{3n}=\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2^3}}=\frac{10}{7}$.

【2661】 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$

证明思路 首先，利用 146 题的结果，有

$$S_{2n}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=C+\ln 2n+\varepsilon_{2n}-2\cdot\frac{1}{2}(C+\ln n+\varepsilon_n)$$

$$=\ln 2+\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=\ln 2$.

其次，再注意 $S_{2n+1}=S_{2n}+\frac{1}{2n+1}$，即知 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}$.

解 考虑部分和 S_m. 当 $m=2n$ 时，有

$$S_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=C+\ln 2n+\varepsilon_{2n}-2\cdot\frac{1}{2}(C+\ln n+\varepsilon_n)^{*)}=\ln 2+\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n=\ln 2+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

于是，得 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=\ln 2$. 同样，当 $m=2n+1$ 时，也有

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(S_{2n}+\frac{1}{2n+1}\right)=\ln 2.$$

故有 $\lim\limits_{m\to\infty}S_m=\ln 2$，即原级数收敛，且其和为 $\ln 2$.

*） 利用 146 题的结果.

【2662】 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2$. 将该级数的各项重排，得到下列级数：

(1) $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots$;

(2) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots$.

求这些级数的和.

提示 可考虑特殊的部分和 S_{3n}，S_{3n+1} 及 S_{3n+2}.

解 (1) 考虑部分和 S_m. 当 $m=3n$ 时，有

$$S_{3n}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}$$

$$=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right).$$

记 $\sigma_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$，$l_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$，则 $l_{2n}=\sigma_{2n}-\sigma_n$，$l_{4n}=\sigma_{4n}-\sigma_{2n}$，且有

$$S_{3n}=\sigma_{4n}-\frac{1}{2}\sigma_{2n}-\frac{1}{2}\sigma_n=(\sigma_{4n}-\sigma_{2n})+\frac{1}{2}(\sigma_{2n}-\sigma_n)=l_{4n}+\frac{1}{2}l_{2n}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}l_{4n}=\lim\limits_{n\to\infty}l_{2n}=\ln2$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{3n}=\ln2+\frac{1}{2}\ln2=\frac{3}{2}\ln2$. 易证当 $m=3n+1$ 及 $m=3n+2$ 时，有

$$S_{3n+1}=S_{3n}+O\left(\frac{1}{n}\right),\quad S_{3n+2}=S_{3n}+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

当 $n\to\infty$ 时，它们与 S_{3n} 有相同的极限，从而，$\lim\limits_{m\to\infty}S_m=\frac{3}{2}\ln2$，即原级数收敛，且其和为 $\frac{3}{2}\ln2$.

(2) 部分和

$$\begin{aligned}S_{3n}&=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\\&=\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4n}\right)\\&=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4n}\right)\\&=\sigma_{2n}-\frac{1}{2}\sigma_n-\frac{1}{2}\sigma_{2n}=\frac{1}{2}(\sigma_{2n}-\sigma_n)=\frac{1}{2}l_{2n},\end{aligned}$$

于是，$\lim\limits_{n\to\infty}S_{3n}=\frac{1}{2}\ln2$. 同样有

$$S_{3n+1}=S_{3n}+O\left(\frac{1}{n}\right),\quad S_{3n+2}=S_{3n}+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

当 $n\to\infty$ 时，它们与 S_{3n} 有相同的极限，从而，$\lim\limits_{m\to\infty}S_m=\frac{1}{2}\ln2$，即原级数收敛，且其和为 $\frac{1}{2}\ln2$.

【2663】 把收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ 的各项重排，使它成为发散的.

解题思路 可这样重排：先取两个正项，然后取一个负项，得

$$1+\frac{1}{\sqrt3}-\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt5}+\frac{1}{\sqrt7}-\frac{1}{\sqrt4}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}+\cdots$$

将上述重排后所得的级数每相邻三项结合而得一个新级数，并注意

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}>\frac{\sqrt2-1}{\sqrt{2n}}>0.$$

解 我们这样进行重排：先取两个正项，然后取一个负项，得

$$1+\frac{1}{\sqrt3}-\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt5}+\frac{1}{\sqrt7}-\frac{1}{\sqrt4}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}+\cdots\tag{1}$$

将上述重排后所得的级数(1)每相邻三项结合而得一个新级数，如果它发散，当然上述重排后所得的级数也发散. 由于

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}}>\frac{1}{\sqrt{4n}},\quad\frac{1}{\sqrt{4n-1}}>\frac{1}{\sqrt{4n}},$$

故有

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}>\frac{2}{\sqrt{4n}}=\frac{1}{\sqrt n}=\frac{\sqrt2}{\sqrt{2n}},$$

因而，

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}>\frac{\sqrt2-1}{\sqrt{2n}}>0\quad(n=1,2,\cdots).$$

但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}$发散，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$发散，从而，重排后所得的级数(1)也发散.

研究变号级数的收敛性：

【2664】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$.

提示 注意 $|a_n|=\frac{1}{2^n}$.

解 由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛，故原级数绝对收敛，从而也是收敛的.

【2665】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$.

解 $a_n=(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+100}{3n+1}=\frac{2}{3}<1,$$

故原级数绝对收敛，从而也是收敛的.

【2666】 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\cdots$.

解题思路 将此级数每相邻三项结合得一新级数，显然可知它是一个交错级数，再利用 2657 题的结果.

解 将此级数每相邻三项结合得一新级数，它是交错级数，满足莱布尼茨判别法的两个条件，因而，它是收敛的. 利用2657题的结果，即知原级数收敛. 显然此级数仅为条件收敛.

【2667】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{100}n}{n}\sin\frac{n\pi}{4}$.

提示 利用狄利克雷判别法.

解 由于当 $n\to\infty$时，$\frac{\ln^{100}n}{n}$单调下降趋于零，且

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{4}\right|=\left|\frac{\cos\frac{\pi}{8}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{4}}{2\sin\frac{\pi}{8}}\right|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}}$$

为有界的，故按狄利克雷判别法即知原级数收敛.

【2668】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$.

解 将通项改写为

$$(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}=(-1)^n\frac{1}{2n}+(-1)^{n+1}\frac{\cos 2n}{2n}.$$

显然级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n}$收敛. 下面证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos 2n}{2n}$也收敛. 事实上，部分和

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+1}\frac{\cos 2n}{2n}=\sum_{n=1}^{N}\frac{\cos 2n}{2n}-\sum_{n=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\frac{2\cos 4n}{4n}=S_N^{(1)}-S_N^{(2)}.$$

但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{2n}$及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 4n}{2n}$均收敛（因为当$k\to\infty$时，$\frac{1}{2k}$单调趋于零，且

$$\left|\sum_{n=1}^{k}\cos 2n\right|=\left|\frac{\sin(2k+1)-\sin 1}{2\sin 1}\right|\leqslant\frac{1}{\sin 1},$$

故由狄利克雷判别法即获证），记它们的和分别为 $S^{(1)}$ 及 $S^{(2)}$，则当$N\to\infty$时，$S_N\to S^{(1)}-S^{(2)}$，即级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos 2n}{2n}$收敛，从而，原级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin^2 n}{n}$收敛.

【2669】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sqrt{n}}{n+100}$.

解 $(-1)^{n}\frac{\sqrt{n}}{n+100}=(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.

显见级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$均收敛，故原级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sqrt{n}}{n+100}$收敛.

【2670】 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}+(-1)^{n}}$

解 $\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}+(-1)^{n}}=\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{1+\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}}}=\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}}\left[1-\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.

由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}}$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$均收敛，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故原级数发散.

【2671】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2})$.

解 $\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2})=\sin\left[n\pi\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right]=\sin n\pi\left[1+\frac{k^2}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right]=\sin\left[n\pi+\frac{k^2\pi}{2n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]$

$$=(-1)^{n}\sin\left[\frac{k^2\pi}{2n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]=(-1)^{n}\frac{k^2\pi}{2n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{k^2\pi}{2n}$条件收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$收敛，故原级数收敛.

【2672】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$.

解 这级数首先出现三个负项，之后出现五个正项. 如此下去，若将这些相邻且具有相同符号的几项合并成一项，则所得的新级数为一交错级数：

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\left[\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}\right]. \tag{1}$$

容易证明不等式

$$\frac{2}{k+1}<\underbrace{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+}_{k\text{项}}\underbrace{\frac{1}{k^2+k}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}}_{(k+1)\text{项}}<\frac{2}{k}$$

事实上，开头k项的和小于$k\cdot\frac{1}{k^2}=\frac{1}{k}$，而后面$k+1$项的和小于$(k+1)\cdot\frac{1}{k^2+k}=\frac{1}{k}$，所以整个和数小于$\frac{2}{k}$. 左面的不等式可由整个和数大于$k\cdot\frac{1}{k^2+k}+(k+1)\cdot\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{2}{k+1}$而得.

于是，级数(1)的通项当$k\to\infty$时趋于零，并且它的绝对值单调减小，由莱布尼茨判别法即知级数(1)收敛.

注意 原级数的部分和恰好包含在级数(1)的某相邻两部分和之间，由级数(1)的收敛性知此两相邻部分和趋于同一极限，因此，原级数部分和有极限，从而，原级数收敛. 显然$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}\right|$发散，故原级数仅为条件收敛.

【2673】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\sqrt[n]{n}}$.

提示 利用65题的结果.

解 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，即通项不趋于零，故级数发散.

【2674】 证明：若$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1\right)>0$，则交错级数 $b_1-b_2+b_3-b_4+\cdots+(-1)^{n-1}b_n+\cdots$ $(b_n>0)$收敛.

证 设$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1\right)=A$，我们取 $\varepsilon>0$，使得 $A-\varepsilon>0$，则存在正整数 N，使当 $n\geqslant N$ 时，有

$$A-\varepsilon<n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1\right)<A+\varepsilon \quad 或 \quad 1<1+\frac{A-\varepsilon}{n}<\frac{b_n}{b_{n+1}}<1+\frac{A+\varepsilon}{n}.$$

因此，当 $n\geqslant N$ 时，$b_n>b_{n+1}$，即 b_n 单调下降.

下面证明$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$. 事实上，利用 2606 题的结果即知，

$$b_n=o\left(\frac{1}{n^{A-\varepsilon}}\right).$$

例如，取 $\varepsilon=\frac{A}{2}$，于是，当 $n\to\infty$时，有 $b_n\to 0$.

因此，交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ 收敛.

研究下列级数的绝对收敛性(除了习题 2690)和条件收敛性：

【2675】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$.

提示 当 $p\leqslant 0$ 时，级数发散. 当 $0<p\leqslant 1$ 时，级数条件收敛. 当 $p>1$ 时，级数绝对收敛.

解 当 $p<0$ 时，由于 $n^{-p}\to+\infty$，故级数发散.

当 $p=0$ 时，由于 $n^{-p}=1$，故级数也发散.

当 $0<p\leqslant 1$ 时，由于 $a_n>a_{n+1}$ 且 $a_n\to 0$（其中 $a_n=\frac{1}{n^p}$），故此交错级数收敛；然当 $0<p\leqslant 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散，故此时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$仅为条件收敛.

当 $p>1$ 时，由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$绝对收敛.

【2676】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$.

解 首先研究此级数当 p 为何值时绝对收敛. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n^p}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1,$$

且当 $p>1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛，故当 $p>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$绝对收敛.

当 $p\leqslant 0$ 时，原级数显然发散.

下面研究当 $0<p\leqslant 1$ 时原级数的收敛性，将通项改写成$\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$. 由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$当 $0<p\leqslant 1$ 时条件收敛，而数列$\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$为一单调上升且趋于 1 的数列，故由阿贝尔判别法即知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$收敛. 但因级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}$当 $0<p\leqslant 1$ 时发散，故当 $0<p\leqslant 1$ 时，原级数仅为条件收敛.

【2677】 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right]$.

解 $\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right]=\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{1}{2n^{2p}}+O\left(\frac{1}{n^{3p}}\right)$.

考虑级数 (1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$， (2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}$， (3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{3p}}$.

显然当 $p>1$ 时，级数(1)，(2)，(3)均绝对收敛. 故当 $p>1$ 时，原级数绝对收敛.

当 $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$ 时，级数(1)条件收敛，级数(2)及(3)均绝对收敛，故当 $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$ 时原级数条件收敛.

当 $p\leqslant 0$ 时，由于通项不趋于零，故原级数发散.

最后，设 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$. 令 m 是满足 $mp\leqslant 1<(m+1)p$ 的唯一正整数(显然 $m\geqslant 2$). 我们有

$$\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right]=\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{2p}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{(-1)^{3n}}{n^{3p}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^{4p}}$$
$$+\cdots+(-1)^{m-1}\cdot\frac{1}{m}\cdot\frac{(-1)^{mn}}{n^{mp}}+O\left(\frac{1}{n^{(m-1)p}}\right).$$

若 m 为偶数，则由于交错级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}}{n^{3p}}$，…，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{(m-1)n}}{n^{(m-1)p}}$ 均收敛(条件收敛)，级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{(m+1)p}}$ (绝对)收敛，而级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{2p}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^{4p}}+\cdots+\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n^{mp}}\right)$$

显然发散，故知原级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right]$ 发散；若 m 为奇数，则可类似地证明原级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right]$ 也发散.

【2678】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n\sin^{2n}x}{n}$.

解 $a_n=(-1)^{n-1}\frac{2^n\sin^{2n}x}{n}$. 考虑

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{2}\sin x)^2}{\sqrt[n]{n}}=(\sqrt{2}\sin x)^2,$$

故当 $\sqrt{2}\sin^2x<1$，即 $|x-n\pi|<\frac{\pi}{4}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.

当 $\sqrt{2}\sin^2x=1$，即当 $|x-n\pi|=\frac{\pi}{4}$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$，它为条件收敛.

当 $\sqrt{2}\sin^2x>1$ 时，例如，可选取 α，使 $\sqrt{2}\sin^2x>\alpha>1$. 当 n 充分大时，有

$$\sqrt[n]{|a_n|}\geqslant\alpha \quad 或 \quad |a_n|\geqslant\alpha^n>1,$$

上式表明，当 $n\to\infty$ 时，a_n 并非趋于零，故此时原级数发散.

【2679】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$.

提示 对于不为负整数的任何 x 值，级数条件收敛.

解 当 x 为负整数时，级数显然无意义.

当 x 不为负整数时，此交错级数满足莱布尼茨判别法的条件，故它是收敛的. 但因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x+n}$ 发散，故原级数当 x 不为负整数时仅为条件收敛.

【2680】 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$.

解 $\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}=\frac{(-1)^n}{n^p\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]^p}=\frac{(-1)^n}{n^p}\left[1-\frac{p(-1)^n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{p}{n^{p+1}}+O\left(\frac{1}{n^{p+2}}\right)$.

当 $0<p\leqslant 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ 条件收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+1}}$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+2}}$ 绝对收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$ 当 $0<p\leqslant 1$ 时条件收敛.

当 $p>1$ 时，由 $\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}=O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ 即知，原级数绝对收敛.

当 $p\leqslant 0$ 时，通项不趋于零，原级数显然发散.

【2681】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{[\sqrt{n}+(-1)^{n-1}]^p}$.

解 由于

$$\frac{(-1)^{n-1}}{[\sqrt{n}+(-1)^{n-1}]^p}=\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{p}{2}}}\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right]^{-p}=\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{p}{2}}}-\frac{p}{n^{\frac{p+1}{2}}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}}\right), \tag{1}$$

故原级数当 $p>2$ 时绝对收敛；而当 $p\leqslant 0$ 时原级数显然发散. 下面我们来研究当 $0<p\leqslant 2$ 时原级数的收敛性.

当 $1<p\leqslant 2$ 时，由(1)式第一项组成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{p}{2}}}$ 条件收敛，而由第二项、第三项组成的级数显然收敛，故此时原级数条件收敛.

当 $0<p\leqslant 1$ 时，由第一项及第三项组成的级数收敛，但由第二项组成的级数发散，故此时原级数发散.

【2682】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}$.

解 $$\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}=\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}\left(1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}\right)^{-1}=\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}\left[1-\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}+O\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)\right]=\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}-\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}+O\left(\frac{1}{n^{3p}}\right).$$

当 $2p>1$ 即 $p>\frac{1}{2}$ 时，由第二项及第三项所组成的级数均收敛，而对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}$，由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0$ 且 $\frac{1}{n^p}$ 单调减小，又

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{4}\right|=\left|\frac{\cos\frac{\pi}{8}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{4}}{2\sin\frac{\pi}{8}}\right|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}},$$

故由狄利克雷判别法知它是收敛的. 从而，当 $p>\frac{1}{2}$ 时，原级数收敛. 又因

$$\frac{\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{n^p}\geqslant\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^p}=\frac{1}{2n^p}-\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{2n^p},$$

且当 $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^p}$ 收敛，故当 $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{n^p}$ 发散，从而，此时原级数条件收敛.

当 $p>1$ 时，由 $\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}=O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ 即知，原级数绝对收敛.

当 $p\leqslant 0$ 时，原级数显然发散.

当 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$ 时，由于 $\frac{\sin^2\frac{n\pi}{2}}{n^{2p}}\geqslant\frac{\sin^2\frac{n\pi}{2}}{n}=\frac{1-\cos n\pi}{2n}\geqslant 0$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{2n}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n}$ 发散，从而，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}$ 发散. 再仿 2677 题 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$ 情形的证明，则易知原级数发散.

【2683】 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$.

解 通项为

$$a_n=(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[100]{n}}=(-1)^n\frac{1}{\sqrt[100]{n}}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{(-1)^n}{\sqrt[100]{n}}+O\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{100}}}\right).$$

显然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{100}}}$绝对收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[100]{n}}$条件收敛，故原级数条件收敛.

【2684】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n^{100}}{2^n}$.

解 考虑绝对值组成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n^{100}}{2^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{100}}{2^n}.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{100}}{2^{n+1}}}{\frac{n^{100}}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{100}=\frac{1}{2}<1,$$

故原级数绝对收敛.

【2685】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n^2]{n}}$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln n}{n^2}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^2}}=e^0=1,$$

从而知通项 $a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt[n^2]{n}}$当 $n\to\infty$时并不趋于零，故原级数发散.

【2686】 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}$.

解 由于$\frac{1}{\ln n}$当 $n\to\infty$时单调下降趋于零，又部分和

$$\left|\sum_{m=2}^{n}\sin\frac{m\pi}{12}\right|=\left|\frac{\cos\frac{\pi}{24}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{12}}{2\sin\frac{\pi}{24}}\right|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\pi}{12}}$$

有界，故级数收敛. 但是，

$$\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}\right|\geqslant\frac{\sin^2\frac{n\pi}{12}}{\ln n}=\frac{1-\cos\frac{n\pi}{6}}{2\ln n}=\frac{1}{2\ln n}-\frac{\cos\frac{n\pi}{6}}{2\ln n},$$

而级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$发散，级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{6}}{\ln n}$收敛，故级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}\right|$发散. 从而，原级数仅为条件收敛.

【2687】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$.

解 记 $A_l=\{n\mid[\sqrt{n}]=l\}$ $(l=1,2,\cdots)$. 显然 A_l 中的元素 n 满足 $l^2\leqslant n<(l+1)^2$，于是，A_l 中元素的个数为 $2l+1$. 考虑 $u_l=\sum\limits_{n\in A_l}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$，则有

$$u_l=\sum_{n\in A_l}\frac{(-1)^l}{n^p}=(-1)^l v_l,$$

其中 $v_l=\sum\limits_{n\in A_l}\frac{1}{n^p}$. 当 $p>0$ 时，有

$$v_l-v_{l+1}=\sum_{s=0}^{2l}\frac{1}{(l^2+s)^p}-\sum_{s=0}^{2(l+1)}\frac{1}{[(l+1)^2+s]^p}$$

$$= \sum_{s=0}^{2l} \left\{ \frac{1}{(l^2+s)^p} - \frac{1}{[(l+1)^2+s]^p} \right\} - \frac{1}{[(l+1)^2+2l+1]^p} - \frac{1}{[(l+1)^2+2l+2]^p}$$

$$= \sum_{s=0}^{2l} \frac{[(l+1)^2+s]^p-(l^2+s)^p}{(l^2+s)^p[(l+1)^2+s]^p} - \frac{1}{[(l+1)^2+2l+1]^p} - \frac{1}{[(l+1)^2+2l+2]^p}.$$

考虑函数 $f(x)=x^r\,(r>1)$. 当 $x>y>0$ 时,由微分学中值公式,有

$$x^r-y^r=r\xi^{r-1}(x-y)\geqslant xy^{r-1}(x-y),$$

其中 $y<\xi<x$.

于是,令 $r=2p$, $x=\sqrt{(l+1)^2+s}$, $y=\sqrt{l^2+s}$,则当 $p>\frac{1}{2}$ 时,有

$$\begin{aligned}&[(l+1)^2+s]^p-(l^2+s)^p\\ &=(\sqrt{(l+1)^2+s})^{2p}-(\sqrt{l^2+s})^{2p}\geqslant 2p(\sqrt{l^2+s})^{2p-1}\left[\sqrt{(l+1)^2+s}-\sqrt{l^2+s}\right]\\ &=2p(\sqrt{l^2+s})^{2p-1}\frac{2l+1}{\sqrt{(l+1)^2+s}+\sqrt{l^2+s}}\geqslant\frac{2p\,l^{2p-1}(2l+1)}{2\sqrt{l^2+4l+1}},\end{aligned}$$

从而,当 $p>\frac{1}{2}$ 时,有

$$v_l-v_{l+1}\geqslant\frac{pl^{2p-1}(2l+1)^2}{(l^2+4l+1)^{2p+\frac{1}{2}}}-\frac{2}{(l^2+4l+2)^p}\geqslant\frac{2l^{2p-1}(l^2+l+\frac{1}{4})}{(l^2+4l+1)^{2p+\frac{1}{2}}}\left(2p-\frac{(l^2+4l+1)^{p+\frac{1}{2}}}{l^{2p-1}(l^2+l+\frac{1}{4})}\right).$$

由于 $2p>1$,而

$$\lim_{l\to+\infty}\frac{(l^2+4l+1)^{p+\frac{1}{2}}}{l^{2p-1}(l^2+l+\frac{1}{4})}=1,$$

故当 l 充分大时,$u_l-v_{l+1}>0$. 于是,存在 l_0,使当 $l\geqslant l_0$ 时,v_l 是单调下降的数列. 又当 $n\in A_l$, $p>0$ 时,有

$$\frac{1}{(l+1)^{2p}}<\frac{1}{n^p}\leqslant\frac{1}{l^{2p}},\quad 故\quad \frac{2l+1}{(l+1)^{2p}}<v_l\leqslant\frac{2l+1}{l^{2p}}.$$

上述不等式说明,当 $p>\frac{1}{2}$ 时,v_l 是单调下降且趋于零的数列(当 $l\to\infty$),从而知级数

$$\sum_{l=1}^{\infty}u_l=\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\,v_l$$

是一个收敛级数. 显然当 $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$ 时,级数 $\sum\limits_{l=1}^{\infty}u_l$ 仅为条件收敛. 当 $p>1$ 时,级数 $\sum\limits_{l=1}^{\infty}u_l$ 绝对收敛. 当 $p\leqslant\frac{1}{2}$ 时,级数 $\sum\limits_{l=1}^{\infty}u_l$ 发散.

现在看原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,其中 $a_n=\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$. 记其部分和为 $S_N=\sum\limits_{n=1}^{N}a_n$,又记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_l$ 的部分和为 $\sigma_M=\sum\limits_{n=1}^{M}u_n$. 那么任意一个部分和 S_N 均被包含在某相邻两个部分和 σ_M 与 σ_{M+1} 之间,即有

$$|S_N-\sigma_M|\leqslant|\sigma_{M+1}-\sigma_M|.$$

注意,当 $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛,而当 $p>1$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛. 此时记其和为 σ,则有 $\lim\limits_{M\to\infty}\sigma_M=\sigma$. 因此,

$$\lim_{N\to\infty}S_N=\lim_{M\to\infty}\sigma_M=\sigma,$$

也即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 有同样的收敛结论. 从而当 $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$ 时,原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛;当 $p>1$ 时绝对收敛,当 $p\leqslant\frac{1}{2}$ 时发散(否则这时的 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛),其中当 $p=1$ 时就是 2672 题.

【2688】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$.

解 记 $a_n=\frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$. 为研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的收敛性，我们引进集合

$$A_k=\{n\mid[\ln n]=k\}\quad(k=1,2,\cdots).$$

那么集合 A_k 内的元素 n 具有性质 $k\leqslant\ln n<k+1$，或写成 $e^k\leqslant n<e\cdot e^k$，其个数 $p_k=[(e-1)e^k]$. 将 A_k 内的元素从小到大排列，可记为 $n_k,n_k+1,\cdots,n_k+p_k-1$. 现考虑

$$u_k=\sum_{n\in A_k}a_n=\sum_{n\in A_k}\frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}=(-1)^k\sum_{n\in A_K}\frac{1}{n}=(-1)^k v_k,$$

其中

$$v_k=\sum_{n\in A_k}\frac{1}{n}=\sum_{v=0}^{p_k-1}\frac{1}{n_k+v}\geqslant\sum_{v=0}^{p_k-1}\frac{1}{e\cdot e^k}=\frac{p_k}{e\cdot e^k}=\frac{1}{e\cdot e^k}[(e-1)e^k]\geqslant\frac{1}{e\cdot e^k}\ \frac{1}{2}(e-1)e^k=\frac{e-1}{2e}.$$

下面我们证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是发散的. 采用反证法，假设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则由柯西准则，对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 N_0，使当 $n\geqslant N_0$ 时，对于一切正整数 p，均有

$$|a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon.$$

今取 $\varepsilon=\frac{e-1}{4e}>0$，对于由此 ε 所找到的 N_0，在 $n\geqslant N_0$ 中选一数 n_k，此处 k 是适当大的一个正整数，有 $n_k\in A_k$，即 $e^k\leqslant n_k<e\cdot e^k$. 又取正整数 $p=p_k-1$，则此时应有

$$|a_{n_k}+a_{n_k+1}+\cdots+a_{n_k+p_k-1}|<\varepsilon. \tag{1}$$

但另一方面却有

$$|a_{n_k}+a_{n_k+1}+\cdots+a_{n_k+p_k-1}|=|u_k|=v_k\geqslant\frac{e-1}{2e}=2\varepsilon>\varepsilon. \tag{2}$$

(1)式与(2)式矛盾. 因而，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

【2689】 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right]^p$.

解 设 $a_n=(-1)^{n-1}\left[\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right]^p$.

当 $p\leqslant0$ 时，显然 $|a_n|\geqslant1$，故 a_n 不趋于零(当 $n\to\infty$)，因而，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

当 $0<p\leqslant2$ 时，记 $a_n=(-1)^{n-1}b_n$，其中

$$b_n=\left[\frac{1\cdot3\cdot\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}\right]^p.$$

由 $\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^p<1$ 易知 $b_n>\left[\frac{2n+1}{2(n+1)}\right]^p b_n=b_{n+1}\ (n=1,2,\cdots)$，且有(见 10 题的不等式)

$$0<b_n<\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)^p\to0\quad(\text{当 }n\to\infty\text{时}),$$

故由莱布尼茨判别法即知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 但由 2598 题的结果知，当 $0<p\leqslant2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散. 于是，当 $0<p\leqslant2$ 时，原级数条件收敛.

当 $p>2$ 时，由 2598 题的结果知，原级数绝对收敛.

【2690】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\cdot\sin n^2}{n}$.

解 记 $a_n=\frac{1}{n}$，$b_n=\sin n\cdot\sin n^2$. 显然 $\{a_n\}$ 单调下降趋于零，且

$$\left|\sum_{n=1}^{N}b_n\right|=\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2}[\cos n(n-1)-\cos n(n+1)]\right|=\left|\frac{1}{2}[\cos0-\cos N(N+1)]\right|\leqslant1,$$

有界($N=1,2,\cdots$),故由狄利克雷判别法知级数收敛.

【2691】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n^2$.

提示 用反证法证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n^2\neq 0$.

解 我们即将指出 $\sin n^2$ 当 $n\to\infty$ 时并不趋于零,因而,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n^2$ 发散.现用反证法,假设

$$\lim_{n\to\infty}\sin n^2=0,$$

于是,$\sin^2(n^2)\to 0$ (当 $n\to\infty$ 时).由 $\sin^2(n^2)+\cos^2(n^2)=1$ 知 $\cos^2(n^2)\to 1$ (当 $n\to\infty$ 时).由于

$$\sin(n+1)^2=\sin(n^2+2n+1)=\sin n^2\cos(2n+1)+\cos n^2\sin(2n+1),$$

故

$$\cos^2(n^2)\sin^2(2n+1)=[\sin(n+1)^2-\sin n^2\cos(2n+1)]^2.$$

让 $n\to\infty$,注意 $\sin n^2\to 0$.于是,由

$$\sin(n+1)^2\to 0 \quad 及 \quad \cos^2(n^2)\to 1.$$

便有 $\sin^2(2n+1)\to 0$,因此,$\sin(2n+1)\to 0$.同理可得 $\sin(2n-1)\to 0$(当 $n\to\infty$ 时).又从

$$\sin(2n+1)+\sin(2n-1)=2\sin 2n\cos 1$$

知还有 $\sin 2n\to 0$(当 $n\to\infty$ 时),即有 $\sin m\to 0$(当 $m\to\infty$ 时).从而也有 $\sin^2 n\to 0$ 及 $\cos^2 n\to 1$.但

$$\sin(n+1)=\sin n\cos 1+\cos n\sin 1,$$

或写成

$$\cos^2 n\sin^2 1=[\sin(n+1)-\sin n\cos 1]^2.$$

让 $n\to\infty$,于上式的两端取极限,并注意到 $\sin^2 1\neq 0$,$\cos^2 n\to 1$,从而产生左端为 $\sin^2 1$ 而右端为零的矛盾.因此,假设

$$\lim_{n\to\infty}\sin n^2=0$$

不真,即原命题 $\sin n^2\not\to 0$(当 $n\to\infty$ 时)成立.因此,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n^2$ 发散.

【2692】 设

$$R(x)=\frac{a_0x^p+a_1x^{p-1}+\cdots+a_p}{b_0x^q+b_1x^{q-1}+\cdots+b_q}$$

为有理函数,式中 $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$,且当 $x\geqslant n_0$ 时,$|b_0x^q+b_1x^{q-1}+\cdots+b_q|>0$.

研究级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}(-1)^nR(n)$ 的绝对收敛性和条件收敛性.

解 首先考虑绝对收敛性.

当 $q-p>1$ 即当 $q>p+1$ 时,由于

$$|R(n)|=\left|\frac{a_0+a_1n^{-1}+\cdots+a_pn^{-p}}{b_0n^{q-p}+b_1n^{q-p-1}+\cdots b_qn^{-p}}\right|\sim\frac{|a_0|}{|b_0|n^{q-p}},$$

而 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^{q-p}}$ 收敛,故级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}(-1)^nR(n)$ 绝对收敛.当 $q\leqslant p+1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}|R(n)|$ 发散.

但当 $p<q$ 时,$(-1)^nR(n)\sim(-1)^n\frac{a_0}{b_0n^{q-p}}$,容易验证原级数符合莱布尼茨判别法的条件,故当 $p<q\leqslant p+1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}(-1)^nR(n)$ 条件收敛.

当 $p\geqslant q$ 时,显见 $R(n)\not\to 0$(当 $n\to\infty$ 时),故级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}(-1)^nR(n)$ 发散.

研究下列级数的收敛性:

【2693】 $\frac{1}{1^p}-\frac{1}{2^q}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^q}+\frac{1}{5^p}-\frac{1}{6^q}+\cdots$.

解 当 $p>1$，$q>1$ 时，显然级数绝对收敛.

当 $0<p=q\leqslant 1$ 时，显然级数并非绝对收敛，但由莱布尼茨判别法知级数收敛. 因此，当 $0<p=q\leqslant 1$ 时，级数条件收敛.

当 p、q 中有一个小于或等于零时，由于通项不趋于零(当 $n\to\infty$)，故级数发散.

【2694】 $1+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}-\frac{1}{4^p}+\cdots$.

解 当 $p>1$ 时，由于原级数是由绝对收敛的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$ 交换项数重排而得来的，因此，它也是绝对收敛的. 下面我们再讨论条件收敛性.

当 $0<p<1$ 时，考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，其中

$$u_n=\frac{1}{(4n-3)^p}+\frac{1}{(4n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^p}=\frac{1}{(4n)^p\left(1-\frac{3}{4n}\right)^p}+\frac{1}{(4n)^p\left(1-\frac{1}{4n}\right)^p}-\frac{1}{(2n)^p}$$

$$=\frac{1}{(4n)^p}\left[1+\frac{3p}{4n}+1+\frac{p}{4n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-\frac{1}{(2n)^p}=\frac{1}{2^p(2n)^p}\left[2+\frac{p}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-\frac{1}{(2n)^p}$$

$$=\frac{1}{(2n)^p}\left(\frac{1}{2^{p-1}}-1\right)+\frac{4p}{(4n)^{p+1}}+O\left(\frac{1}{n^{p+2}}\right). \qquad (1)$$

由第一项组成的级数发散到 $+\infty$，而由其余各项分别组成的级数均收敛. 因此，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散. 易证原级数与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 同时收敛或同时发散(这可用部分和作比较而得)，从而，当 $0<p<1$ 时，原级数发散.

当 $p=1$ 时，(1)式第一项为零，而由第二项及第三项分别组成的级数显然收敛，故当 $p=1$ 时，原级数收敛，并且显然不是绝对收敛的，即原级数条件收敛.

当 $p\leqslant 0$ 时，原级数显然发散.

【2695】 $1+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{1^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}-\frac{1}{3^p}+\frac{1}{9^p}+\frac{1}{11^p}-\frac{1}{5^p}+\cdots$.

解 易证原级数与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 同时收敛或同时发散，其中

$$u_n=\frac{1}{(4n-3)^p}+\frac{1}{(4n-1)^p}-\frac{1}{(2n-1)^p}=\frac{1}{2^p(2n)^p}\left[2+\frac{p}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-\frac{1}{(2n)^p}\ \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^p}$$

$$=\frac{1}{(2n)^p}\left(\frac{1}{2^{p-1}}-1\right)+\frac{1}{2^p}\left(\frac{p}{2^p}-\frac{p}{2}\right)\frac{1}{n^{p+1}}+O\left(\frac{1}{n^{p+2}}\right) \qquad (1)$$

当 $p>1$ 时，级数显然绝对收敛.

当 $0<p<1$ 时，由(1)式第一项组成的级数发散，而由(1)式第二项及第三项所分别组成的级数均收敛. 因此，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散. 从而当 $0<p<1$ 时，原级数发散.

当 $p=1$ 时，原级数条件收敛. 事实上，此时(1)式中第一项及第二项均为零，而由第三项所组成的级数收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，从而原级数收敛. 但级数

$$1+\frac{1}{3}+1+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{5}+\cdots$$

是发散的.

当 $p\leqslant 0$ 时，原级数显然发散.

【2696】 $1-\frac{2}{2^q}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}-\frac{2}{5^q}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}-\frac{2}{8^q}+\frac{1}{9^p}+\cdots$.

解 当 $p>1$，$q>1$ 时，记 $\delta=\min(p,q)>1$. 由于级数

$$1+\frac{2}{2^q}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{2}{5^q}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}+\frac{2}{8^q}+\frac{1}{9^p}+\cdots \tag{1}$$

的前 N 项部分和 S_N 有

$$S_N\leqslant\sum_{k=1}^{N}\frac{2}{k^\delta}=2\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^\delta}<+\infty,$$

故 $\{S_N\}$ 单调上升且有界，从而，$\lim\limits_{N\to\infty}S_N$ 存在. 于是，原级数当 $p>1$，$q>1$时绝对收敛.

当 $0<p=q\leqslant1$ 时，由于级数(1)的 S_N 有

$$S_N\geqslant\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\to+\infty \quad (\text{当 } N\to+\infty\text{时}),$$

故原级数并不绝对收敛. 但当 $0<p=q\leqslant1$ 时，可考虑级数 $(1-\frac{2}{2^p})+\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$，其中

$$\begin{aligned}u_k&=\frac{1}{(3k)^p}+\frac{1}{(3k+1)^p}-\frac{2}{(3k+2)^p}=\frac{1}{(3k)^p}\left[1-\left(1+\frac{2}{3k}\right)^{-p}\right]+\frac{1}{(3k+1)^p}\left[1-\left(1+\frac{1}{3k+1}\right)^{-p}\right]\\&=\frac{1}{(3k)^p}\left[\frac{2p}{3k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right]+\frac{1}{(3k+1)^p}\left[\frac{p}{3k+1}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right]\\&=\frac{2p}{(3k)^{p+1}}+\frac{p}{(3k+1)^{p+1}}+O\left(\frac{1}{k^{p+2}}\right)=\frac{3p}{(3k)^{p+1}}+O\left(\frac{1}{k^{p+2}}\right).\end{aligned}$$

因此，显然 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ 收敛. 易证原级数与级数 $(1-\frac{2}{2^p})+\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ 同时收敛或同时发散. 因而原级数当 $0<p=q\leqslant1$ 时条件收敛.

当 p,q 中有一个小于或等于零时，原级数显然发散.

【2697】 证明：级数

(1) $\sin x+\frac{\sin2x}{2}+\frac{\sin3x}{3}+\cdots$， (2) $\cos x+\frac{\cos2x}{2}+\frac{\cos3x}{3}+\cdots$

在区间$(0,\pi)$内不绝对收敛.

证 (1) $\left|\frac{\sin nx}{n}\right|\geqslant\frac{\sin^2nx}{n}=\frac{1-\cos2nx}{2n}=\frac{1}{2n}-\frac{\cos2nx}{2n}$.

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$发散到$+\infty$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos2nx}{2n}$收敛(这是因为$\frac{1}{2n}$单调趋于零，且 $\sum\limits_{n=1}^{N}\cos2nx$ 有界，故由狄利克雷判别法即获证)，故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin nx}{n}\right|$$

在$(0,\pi)$内发散. 至于原级数的收敛性是显然的. 因此，原级数在$(0,\pi)$内仅为条件收敛.

(2) 可用(1)的方法证明. 事实上，由

$$\left|\frac{\cos nx}{n}\right|\geqslant\frac{\cos^2nx}{n}=\frac{1}{2n}+\frac{\cos2nx}{2n}$$

即知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos nx}{n}\right|$$

在$(0,\pi)$内发散. 至于原级数的收敛性是显然的. 因此，原级数在$(0,\pi)$内仅为条件收敛.

【2698】 对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}\quad(0<x<\pi)$$

对全体参数(p,x)定出：(1)绝对收敛域；(2)非绝对收敛域.

解 当 $p>1$ 时，由于

$$\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right|\leqslant\frac{1}{n^p},\quad \left|\frac{\sin nx}{n^p}\right|\leqslant\frac{1}{n^p}\quad(0<x<\pi),$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛，故这两个级数当 $p>1$ 时，对于$(0,\pi)$内任一 x 值均绝对收敛.

当 $0<p\leqslant 1$ 时，由于$\frac{1}{n^p}$单调下降趋于零，且部分和 $\sum_{n=1}^{N}\cos nx$ 及 $\sum_{n=1}^{N}\sin nx$ 均有界$(0<x<\pi)$，故由狄利克雷判别法知两级数均收敛. 但绝对值组成的级数均发散，事实上，

$$\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right|\geqslant\frac{\cos^2 nx}{n^p}=\frac{1}{2n^p}+\frac{\cos 2nx}{2n^p},\quad \left|\frac{\sin nx}{n^p}\right|\geqslant\frac{\sin^2 nx}{n^p}=\frac{1}{2n^p}-\frac{\cos 2nx}{2n^p},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^p}$当 $0<p\leqslant 1$ 时发散到$+\infty$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{2n^p}$当 $0<p\leqslant 1$ 时收敛，故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos nx|}{n^p},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin nx|}{n^p}$$

当 $0<p\leqslant 1$ 时均发散. 因此，当 $0<p\leqslant 1$ 时，对于$(0,\pi)$内任一 x 值，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$$

均为条件收敛. 当 $p\leqslant 0$ 时，两级数显然发散.

总之，当 $0<x<\pi$ 时，两级数的(1)绝对收敛域为 $p>1$；(2)条件收敛域为 $0<p\leqslant 1$.

【2699】 对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n!\ n^q}$$

定出：(1)绝对收敛域；(2)条件收敛域.

解 记 $a_n=\frac{(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n!\ n^q}$.

为研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 的绝对收敛性，可考虑 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，其中 $u_n=|(-1)^{n-1}a_n|=a_n$. 由于

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\frac{n+1}{n+1+p}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)^q=\left(1-\frac{p}{n+1+p}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^q$$
$$=\left[1-\frac{p}{n}+\frac{p(p+1)}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]\left[1+\frac{q}{n}+\frac{q(q-1)}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]=1+\frac{q-p}{n}+\Delta_n,$$

其中

$$\Delta_n=\left[\frac{1}{2}q(q-1)-pq+p(p+1)\right]\frac{1}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

故由高斯判别法知：当 $q>p+1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，从而，原级数绝对收敛. 当然 $p=-1,-2,\cdots$时原级数也绝对收敛. 当$q\leqslant p+1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，从而，原级数并不绝对收敛. 但当$p<q\leqslant p+1$时原级数是条件收敛的. 因为当 n 足够大时，易见 $a_n>a_{n+1}$，即 a_n 单调下降. 记 $q=p+\varepsilon$，$\varepsilon>0$，则

$$a_n=\frac{(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n!\ n^{p+\varepsilon}},$$

取对数，有

$$\ln a_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{p}{k}\right)-(p+\varepsilon)\ln n=\sum_{k=1}^{n}\frac{p}{k}+\sum_{k=1}^{n}O\left(\frac{1}{k^2}\right)-(p+\varepsilon)\ln n$$
$$=p\ln n+pr+A_1+O\left(\frac{1}{n}\right)-p\ln n-\varepsilon\ln n=pr+A_1+O\left(\frac{1}{n}\right)-\varepsilon\ln n\to-\infty\quad(\text{当 } n\to+\infty\text{时}),$$

其中 r 及 A_1 为某些常数，从而知$\lim_{n\to\infty}a_n=0$. 由莱布尼茨判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛. 因此，当$p<q\leqslant p+1$时，原级数条件收敛.

当 $q=p$ 时，有 $\ln a_n=pr+A_1+O(\frac{1}{n})\to pr+A_1$（当 $n\to\infty$时），也即$\lim_{n\to\infty}a_n=e^{pr+A_1}\neq 0$，原级数发散.

当 $q<p$ 时，对于足够大的 n 有 $a_n<a_{n+1}$，可见通项也不趋于零，故原级数也发散.

总之，(1) 级数的绝对收敛域为 $q>p+1$；(2) 级数的条件收敛域为 $p<q\leqslant p+1$.

【2700】 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\binom{m}{n}$ 的收敛性，其中 $\binom{m}{n}=\dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$.

解 记 $a_n=\binom{m}{n}$，有

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\left|\frac{n+1}{m-n}\right|=\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)\left[1+\frac{m}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\right|=1+\frac{m+1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

故由高斯判别法知：当 $m+1>1$ 即当 $m>0$ 时，级数绝对收敛. 当 $m<0$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散. 至于当 $m=0$ 时，级数每一项为零，因此，级数显然绝对收敛.

下面我们证明：当 $-1<m<0$ 时，级数收敛，从而知级数条件收敛. 事实上，当 n 足够大之后，易见 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\binom{m}{n}$ 为交错级数. 又因 $-1<m<0$，故 $\left|\dfrac{m-n}{n+1}\right|<1$，它等价于 $|a_{n+1}|<|a_n|$，这表明级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}a_n$ 的通项的绝对值是单调减少的. 现在再证明 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$. 为此，取对数，有

$$\begin{aligned}\ln|a_n|&=\ln\left|\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}\right|\\&=\ln\left|\left(1-\frac{m+1}{1}\right)\left(1-\frac{m+1}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{m+1}{n}\right)\right|=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{m+1}{k}\right).\end{aligned}$$

由于当 $k\to+\infty$ 时，$\dfrac{\ln\left(1-\frac{m+1}{k}\right)}{-\frac{m+1}{k}}\to1$，而 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}$ 发散到 $+\infty$，故 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\dfrac{m+1}{k}\right)$ 发散到 $-\infty$，因此，$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$. 由莱布尼茨判别法知 $\sum\limits_{n=n}^{\infty}a_n$ 收敛，从而，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛.

当 $m\leqslant-1$ 时，由于级数的通项不趋于零，故级数发散.

总之，当 $m\geqslant0$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\binom{m}{n}$ 绝对收敛；当 $-1<m<0$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\binom{m}{n}$ 条件收敛.

【2701】 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=1$，则可否断定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 也收敛？研究例子

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\quad 和 \quad\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right].$$

提示 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 均为正项级数时可断定. 但当它们不一定都是正项级数时不能断定，例如，$a_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，$b_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}$.

解 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 均为正项级数，则由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛可断定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 也收敛. 但当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 不一定都是正项级数时，则由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的收敛性不能断定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 也收敛. 例如，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 是收敛的，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}}{\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}=1,$$

但级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right]$$

却是发散的.事实上,它是由收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 及发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 相加而得的,故它是发散的.

【2702】 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为非绝对收敛的级数,

$$P_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i|+a_i}{2},\quad N_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i|-a_i}{2},$$

证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{N_n}{P_n}=1$.

证 首先注意,非绝对收敛即条件收敛.若级数发散,本命题不一定成立.例如,取 $a_i=1$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{N_n}{P_n}=0$;若 $a_i=1$(当$i=1(\text{mod}2)$时)或 $a_i=-\frac{1}{2}$(当 $i=0(\text{mod}2)$时),此时将有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{N_n}{P_n}=\frac{1}{2}$,等等.

当级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛时,有

$$\frac{N_n}{P_n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}|a_i|-\sum_{i=1}^{n}a_i}{\sum_{i=1}^{n}|a_i|+\sum_{i=1}^{n}a_i}=\frac{1-\dfrac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{\sum_{i=1}^{n}|a_i|}}{1+\dfrac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{\sum_{i=1}^{n}|a_i|}},$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛及 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=+\infty$,故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{\sum_{i=1}^{n}|a_i|}=0,$$

从而,即得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{N_n}{P_n}=1$.

【2703】 证明:对于每一个 $p>0$,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 的和是在 $\frac{1}{2}$ 与 1 之间.

证 首先,由于此级数的前 $2n$ 项的和

$$S_{2n}=\left(1-\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^p}\right]$$

中的每一个括号内的数大于零,故 $\{S_{2n}\}$ 是一个单调递增的数列.又因

$$S_{2n}=1-\left(\frac{1}{2^p}-\frac{1}{3^p}\right)-\left(\frac{1}{4^p}-\frac{1}{5^p}\right)-\cdots-\left[\frac{1}{(2n-2)^p}-\frac{1}{(2n-1)^p}\right]-\frac{1}{(2n)^p}<1,$$

故 $\{S_{2n}\}$ 是以 1 为上界的数列.从而知 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}$ 存在且不超过 1.

由于此级数当 $p>0$ 时是收敛的,故对于数列 $\{S_{2n}\}$,它的极限与级数的和相等,即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}\leqslant 1\quad(p>0)$$

(对于 $p=1$,此级数的和为 $\ln 2$).

其次,我们证明此和不小于 $\frac{1}{2}$,仍考虑前 $2n$ 项的部分和 $\tilde{S}_{2n}$,则有 $S_{2n}=1-\frac{1}{2^p}+\tilde{S}_{2n}$,其中

$$\tilde{S}_{2n}=\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{(2k-1)^p}-\frac{1}{(2k)^p}\right]=\sum_{k=2}^{n}\frac{p}{(2k-1+\theta_k)^{p+1}},$$

这里 $0<\theta_k<1$ $(k=2,3,\cdots,n)$.由于 $p>0$ 以及

$$\frac{1}{(2k-1+\theta_k)^{p+1}}\geqslant\frac{1}{(2k)^{p+1}}\quad(k=2,3,\cdots),$$

即得 $\tilde{S}_{2n}\geqslant\sum_{k=2}^{n}\frac{p}{(2k)^{p+1}}=\frac{p}{2^{p+1}}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^{p+1}}\geqslant\frac{p}{2^{p+1}}\left[\int_2^n\frac{dx}{x^{p+1}}+\frac{1}{n^{p+1}}\right]=\frac{p}{2^{p+1}}\left[-\frac{1}{px^p}\Big|_2^n+\frac{1}{n^{p+1}}\right]$

$$=\frac{1}{2^{2p+1}}-\frac{1}{2^{p+1}}\cdot\frac{1}{n^p}+\frac{p}{2^{p+1}}\cdot\frac{1}{n^{p+1}}=\frac{1}{2^{2p+1}}-\frac{1}{2^{p+1}}\cdot\frac{1}{n^p}\left(1-\frac{p}{n}\right)=\frac{1}{2^{2p+1}}+\Delta_n,$$

此处

$$\Delta_n=\frac{-1}{2^{p+1}}\cdot\frac{1}{n^p}\left(1-\frac{p}{n}\right)=O\left(\frac{1}{n^p}\right)\quad(当\ n\to\infty 时).$$

于是,对任给的 $\varepsilon>0$,存在正整数 N_0,使当 $n\geqslant N_0$ 时,有 $|\Delta_n|<\varepsilon$. 这时有

$$S_{2n}=1-\frac{1}{2^p}+\tilde{S}_{2n}\geqslant1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^{2p+1}}-\varepsilon.$$

但当 $p>0$ 时,$1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^{2p+1}}>\frac{1}{2}$,这是因为 $2^p+\frac{1}{2^p}>2$,故得

$$1+\frac{1}{2^{2p}}>\frac{2}{2^p}\quad 或\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2p+1}}>\frac{1}{2^p}.$$

从而,$S_{2n}>\frac{1}{2}-\varepsilon$,故收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$的和

$$S=\lim_{n\to\infty}S_{2n}\geqslant\frac{1}{2}-\varepsilon.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性,即得 $S\geqslant\frac{1}{2}$. 综上所述,$\frac{1}{2}\leqslant S\leqslant1$.

【2704】 证明:若把级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$$

的各项重新安排,使依次 p 个正项的一组与依次 q 个负项的一组相交替,则新级数的和为 $\ln2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.

证 按题意,我们要证

$$1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2p-1}-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{2q}+\frac{1}{2p+1}+\cdots+\frac{1}{4p-1}-\frac{1}{2q+2}-\cdots=\ln2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}.\qquad(1)$$

首先,我们有

$$H_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+C+\varepsilon_n,$$

其中 C 为欧拉常数,而 ε_n 为无穷小量,由此即得

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m}=\frac{1}{2}H_m=\frac{1}{2}\ln m+\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}\varepsilon_m,$$

$$1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1}=H_{2k}-\frac{1}{2}H_k=\ln2+\frac{1}{2}\ln k+\frac{C}{2}+\varepsilon_{2k}-\frac{1}{2}\varepsilon_k.$$

于是,若把级数(1)的 p 项或 q 项的数串组合起来,考虑

$$S_{2n}=1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2p-1}-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{2q}+\frac{1}{2p+1}+\cdots+\frac{1}{2(n-1)q}+\frac{1}{2(n-1)p+1}+\cdots+\frac{1}{2np-1}$$

$$=\ln2+\frac{1}{2}\ln\frac{2np}{2(n-1)q}+\alpha_n=\ln2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}+\alpha_n',$$

其中 $\alpha_n\to0$,$\alpha_n'\to0$(当 $n\to\infty$);又因 $S_{2n+1}=S_{2n}+\beta_n$,其中$\beta_n\to0$(当 $n\to\infty$时),故

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}+\ln2.$$

从而,级数(1)的和为 $\ln2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.

【2705】 证明:若改变调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

部分项的符号，使得 p 个正项之后跟随着 q 个负项（$p\neq q$），但不变更原来的顺序，则此级数仍是发散的. 仅当 $p=q$ 时得到收敛级数.

证 若 $p\neq q$，不妨设 $p>q$，记

$$a_k=\frac{1}{(p+q)k+1}+\cdots+\frac{1}{(p+q)k+p}-\frac{1}{(p+q)k+p+1}-\cdots-\frac{1}{(p+q)k+p+q}.$$

由于其中正项的项数比负项的项数为多，且所有正项中任一项均比任一负值的绝对值为大，故有

$$a_k>\frac{1}{(p+q)k+1}>0 \quad (k=1,2,\cdots).$$

但 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(p+q)k+1}$ 发散，故 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k$ 发散. 从而比较一下即知所得级数发散（若 $p<q$ 同理可证）.

若 $p=q$，记 $$b_k=\frac{1}{kp+1}+\frac{1}{kp+2}+\cdots+\frac{1}{kp+p} \quad (k=0,1,2,\cdots).$$

考虑 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k b_k$. 显然 $b_k>0$，$b_k>b_{k+1}(k=0,1,2,\cdots)$，且 $b_k\to 0$（当 $k\to\infty$ 时），故由莱布尼茨判别法知级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k b_k$ 收敛. 易见所得级数与级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k b_k$ 同时收敛或同时发散. 因此，当 $p=q$ 时，所得级数收敛.

§3. 级数的运算

级数的和与积 我们定义：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\pm\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$，

式中 $c_n=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$.

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 二者收敛，则等式(1)并非仅有形式上的意义；至于等式(2)，则要求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 二者收敛，并且其中最少有一个是绝对收敛的.

【2706】 若两个级数，(1)一个收敛，而另一个发散；(2)两个都发散，则关于这两个级数的和可下何种断言？

提示 *(1)一定发散. (2)可以收敛，也可以发散. 例如*，$a_n=(-1)^n$，$b_n=(-1)^{n+1}$ *及* $a_n=b_n=\frac{1}{n}$.

解 (1) 一定发散. 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，如果其和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛，则将有

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}c_n-\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

也收敛，得出矛盾. 于是，此时两级数的和一定发散.

(2) 可以收敛，也可以发散. 例如：

(i) 设 $a_n=(-1)^n$，$b_n=(-1)^{n+1}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 均发散，但 $c_n=0$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛；

(ii) 设 $a_n=b_n=\frac{1}{n}$，则 $c_n=\frac{2}{n}$. 显见，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 均发散.

【2707】 求二级数的和：$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3^n}+\frac{(-1)^n}{n^3}\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\right]$.

提示 显然收敛，且和为$\frac{2}{3}$.

解 两级数显然是收敛的.因此，它们的和也是收敛的.逐项相加，即可求得两级数的和为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3^{n+1}}=\frac{4}{3^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}.$$

求下列级数的和：

【2708】 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right]$.

解 此级数是由两收敛级数逐项相加而得的，因此，它是收敛的，且其和为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{4}.$$

【2709】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}$.

解题思路 级数显然绝对收敛，且其和为

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}-1=\sum_{n\in A_1}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}+\sum_{n\in A_2}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}+\sum_{n\in A_3}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}-1,$$

其中： $A_1=\{n|n=3k,\ k=0,1,2,\cdots\}$,

$A_2=\{n|n=3k+1,\ k=0,1,2,\cdots\}$,

$A_3=\{n|n=3k+2,\ k=0,1,2,\cdots\}$.

以上这样计算是合理的.

解 原级数显然绝对收敛，记其和为S，则有

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}-1.$$

设将$n=0,1,2,\cdots$分成三类：

$A_1=\{n|n=3k,\ k=0,1,2,\cdots\}$,

$A_2=\{n|n=3k+1,\ k=0,1,2,\cdots\}$,

$A_3=\{n|n=3k+2,\ k=0,1,2,\cdots\}$,

则
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}=\sum_{n\in A_1}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}+\sum_{n\in A_2}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}+\sum_{n\in A_3}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{3k}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{2\pi}{3}}{2^{3k+1}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(\pi+\frac{\pi}{3})}{2^{3k+2}}$$
$$=\left[1+\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{2^2}\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right]\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^3}\right)^k=\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{8}}=\frac{5}{7},$$

以上计算是合理的，因为上述三个级数均绝对收敛，故其和为$\frac{5}{7}$.从而，原级数的和为

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}-1=\frac{5}{7}-1=-\frac{2}{7}.$$

【2710】⁺ $\sum_{n=0}^{\infty}x^{\left[\frac{n}{2}\right]}y^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\quad(|xy|<1)$.

解题思路 仿2709题，有

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{[\frac{n}{2}]} y^{[\frac{n+1}{2}]} = \sum_{n\in A_1} x^{[\frac{n}{2}]} y^{[\frac{n+1}{2}]} + \sum_{n\in A_2} x^{[\frac{n}{2}]} y^{[\frac{n+1}{2}]},$$

其中：$A_1=\{n\,|\,n=2k,\ k=0,1,2,\cdots\}$， $A_2=\{n\,|\,n=2k+1,\ k=0,1,2,\cdots\}$.

解 设将 $n=0,1,2,\cdots$分成二类：

$$A_1=\{n\,|\,n=2k,\ k=0,1,2,\cdots\},\quad A_2=\{n\,|\,n=2k+1,\ k=0,1,2,\cdots\},$$

则

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{[\frac{n}{2}]} y^{[\frac{n+1}{2}]} = \sum_{n\in A_1} x^{[\frac{n}{2}]} y^{[\frac{n+1}{2}]} + \sum_{n\in A_2} x^{[\frac{n}{2}]} y^{[\frac{n+1}{2}]} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k y^k + \sum_{k=0}^{\infty} x^k y^{k+1}.$$

显然上式右端两级数当$|xy|<1$时绝对收敛，故原级数收敛，且其和为

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{[\frac{n}{2}]} y^{[\frac{n+1}{2}]} = \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k + y\sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k = (1+y)\sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k = \frac{1+y}{1-xy}.$$

【2711】 证明：$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1$.

证 此两级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 均绝对收敛，其中

$$a_n=\frac{1}{n!},\quad b_n=\frac{(-1)^n}{n!},$$

故可写成

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n,$$

其中

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = \sum_{i=0}^{n}\left[\frac{1}{i!}\cdot\frac{(-1)^{n-i}}{(n-i)!}\right] = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\left[(-1)^{n-i}\cdot\frac{n!}{i!(n-i)!}\right] = \frac{1}{n!}(1-1)^n = 0$$

$$(n=1,2,\cdots).$$

从而知

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1.$$

当然，由 e 的定义知

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e} \quad 及 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \mathrm{e}^{-1}.$$

从而，就可以直接计算得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-1} = 1.$$

【2712】 证明：$\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n \quad (|q|<1)$.

证 由$|q|<1$知级数 $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ 绝对收敛，故可写成 $\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$，其中

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} (q^i\cdot q^{n-i}) = q^n \sum_{i=0}^{n} 1 = (n+1)q^n \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

因此，$\left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,q^n$.

【2713】 证明：收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ 的平方是发散级数.

证 如果此级数的平方收敛，则可写其积为 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$，即 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$，其中

$$c_n=\frac{1}{1}\cdot\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{(-1)^n}{\sqrt{n-1}}+\cdots+\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\cdot\frac{(-1)^{n-k+2}}{\sqrt{n-k+1}}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{1}$$

$$=(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{1\cdot\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{n-1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{n-k+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}\cdot 1}\right).$$

由于括号中的每一项都大于$\frac{1}{n}$ *），故$|c_n|>1$，这与级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$收敛相矛盾．因此，级数$\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^2$发散．

*） 只要证$k(n-k+1)<n^2$或$n^2-nk+k^2-k>0$．由于

$$n^2-nk+k^2-k=\left(n-\frac{k}{2}\right)^2+\frac{3k^2-4k}{4},$$

故只要证$3k^2-4k>0$．但$3k^2-4k=3k\left(k-\frac{4}{3}\right)$，可见对于$k=2,3,\cdots$上式成立．至于当$k=1$时，显然有$1\cdot(n-1+1)=n\leqslant n^2$或$\frac{1}{1\cdot\sqrt{n}}\geqslant\frac{1}{n}$．因而不等式$k(n-k+1)<n^2$成立．

【2714】 证明：下面二级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}\ (\alpha>0)\quad 及\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^\beta}\ (\beta>0)$$

的积当$\alpha+\beta>1$时是收敛级数，而当$\alpha+\beta<1$时是发散级数．

证 记

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^\beta}=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\quad(\alpha>0,\ \beta>0).$$

按乘法法则应有

$$c_n=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(-1)^{i-1}}{i^\alpha}\cdot\frac{(-1)^{n-i}}{(n-i+1)^\beta}\right]=(-1)^{n-1}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i+j=n+1}}\frac{1}{i^\alpha j^\beta}=(-1)^{n-1}d_n,$$

其中$d_n=\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{i^\alpha(n-i+1)^\beta}$ $(n=1,2,\cdots)$．

（1）当$\alpha+\beta\leqslant 1$时，有

$$d_n\geqslant\sum_{1\leqslant i\leqslant\frac{n}{2}}\frac{1}{i^\alpha(n-i+1)^\beta}\geqslant\frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^\alpha}\sum_{1\leqslant i\leqslant\frac{n}{2}}\frac{1}{(n-i+1)^\beta}=\frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^\alpha}\sum_{\frac{n}{2}<j\leqslant n}\frac{1}{j^\beta}\geqslant\frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^\alpha}\int_{\frac{n}{2}}^{n}\frac{dt}{t^\beta}$$

$$=2^\alpha\cdot\frac{1}{1-\beta}\left(1-\frac{1}{2^{1-\beta}}\right)n^{1-(\alpha+\beta)}.$$

于是，当$\alpha+\beta<1$时，$d_n\to\infty$（当$n\to\infty$时）；当$\alpha+\beta=1$时，$d_n\geqslant 2^\alpha\cdot\frac{1}{1-\beta}\left(1-\frac{1}{2^{1-\beta}}\right)>0$，即当$\alpha+\beta\leqslant 1$时，$d_n$不趋于零（当$n\to\infty$时），从而知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}d_n$为发散级数．

（2）当$\alpha+\beta>1$时，有

$$d_n=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{i^\alpha(n-i+1)^\beta}=\sum_{1\leqslant i\leqslant\frac{n}{2}}\frac{1}{i^\alpha(n-i+1)^\beta}+\sum_{\frac{n}{2}<i\leqslant n}\frac{1}{i^\alpha(n-i+1)^\beta}=\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2,$$

其中

$$\sum\nolimits_1=\sum_{1\leqslant i\leqslant\frac{n}{2}}\frac{1}{i^\alpha(n-i+1)^\beta}\leqslant\frac{1}{\left(\frac{n}{2}+1\right)^\beta}\sum_{1\leqslant i\leqslant\frac{n}{2}}\frac{1}{i^\alpha}\leqslant\frac{1}{\left(\frac{n}{2}+1\right)^\beta}\left(1+\int_1^{\frac{n}{2}}\frac{dt}{t^\alpha}\right)$$

$$=O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)+O\left(n^{-\beta}\cdot\int_1^{\frac{n}{2}}\frac{dt}{t^\alpha}\right)=O(n^{-\beta})+O(n^{1-(\alpha+\beta)}),$$

同理有 $\sum\nolimits_2\leqslant O(n^{-\alpha})+O(n^{1-(\alpha+\beta)})$．

由于$\alpha>0$，$\beta>0$，$1-(\alpha+\beta)<0$，故有d_n趋于零：

$$d_n\leqslant O(n^{-\alpha})+O(n^{-\beta})+O(n^{1-(\alpha+\beta)})\to 0\quad（当n\to\infty时）．$$

记$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$的部分和为$S_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$．考虑原两级数的部分和

$$A_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^{\alpha}},\quad B_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^{\beta}}.$$

今考察下列差数

$$\begin{aligned}\Delta_n=A_nB_n-S_n&=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{i^{\alpha}}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}}{j^{\beta}}\right)-S_n\\&=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{i^{\alpha}}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}}{j^{\beta}}\right)-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\ i+j=k+1}}\frac{1}{i^{\alpha}j^{\beta}}\\&=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i}}{i^{\alpha}}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j}}{j^{\beta}}\right)-\sum_{\substack{2\leqslant i+j\leqslant n-1\\ 1\leqslant i,\ j\leqslant n}}\sum\left(\frac{(-1)^{\alpha}}{i^{\alpha}}\right)\left(\frac{(-1)^{j}}{j^{\beta}}\right)\\&=\sum_{s=1}^{2n-1}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant s\\ i+j=s+1}}\frac{(-1)^{s+1}}{i^{\alpha}j^{\beta}}-\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\ i+j=k+1}}\frac{(-1)^{k-1}}{i^{\alpha}j^{\beta}}=\sum_{s=n+1}^{2n-1}(-1)^{s-1}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant s\\ i+j=s+1}}\frac{1}{i^{\alpha}j^{\beta}}.\end{aligned}$$

为估计上述差数各项，可看下列乘法表(图 5.1)．A_nB_n 表示下列乘法表正方形各交点上乘积的全部和，而 S_n 表示下列乘法表对角线左上角各交点上乘积项(圆点号处的乘积项)的总和．于是，剩下的差数实指下列乘法表对角线的右下部分各交点处乘积项(打×号处的乘积项)的总和．

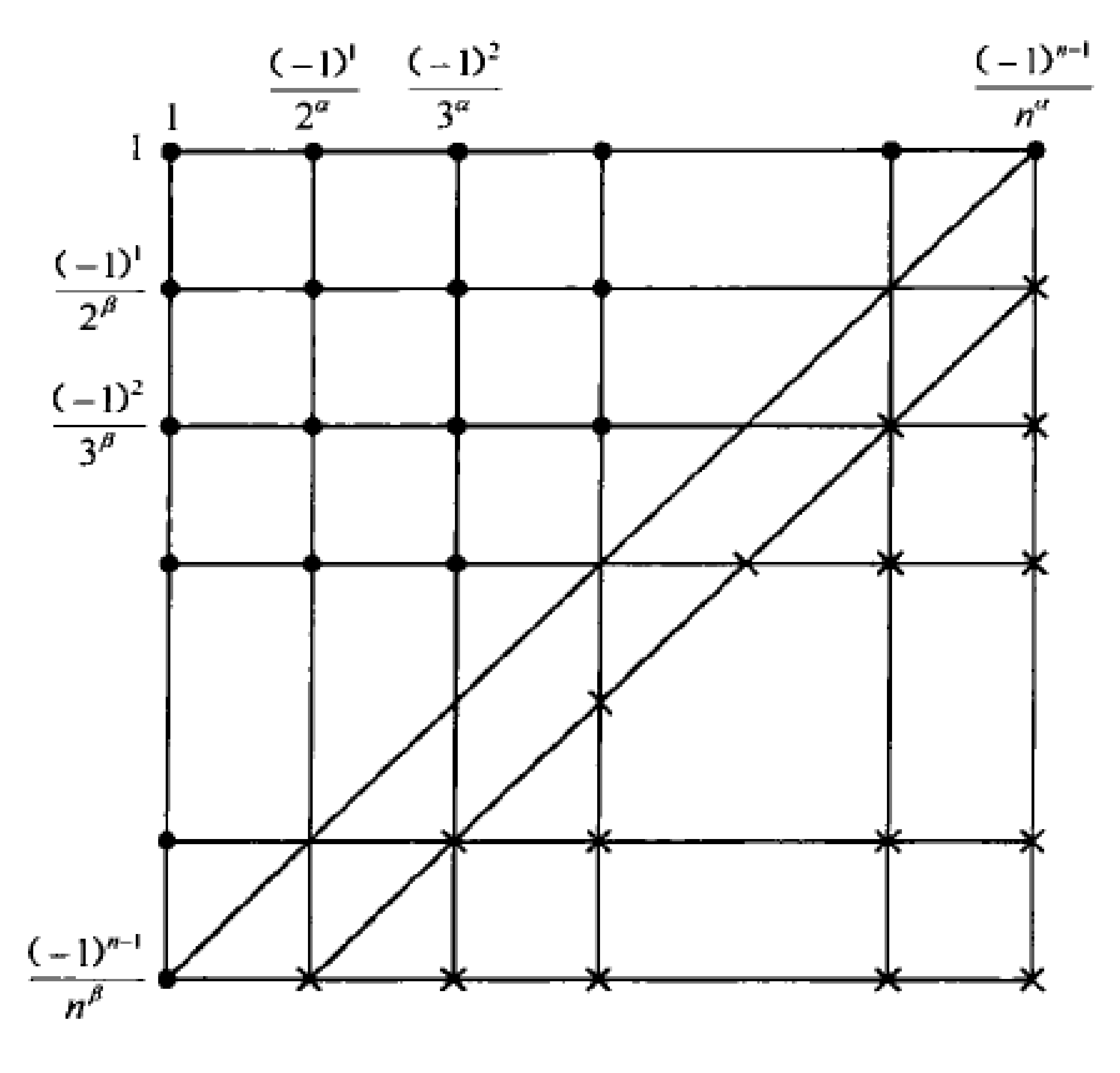


图 5.1

于是，有

$$\begin{aligned}\Delta_n&=\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}}\left[\frac{(-1)^1}{2^{\alpha}}+\frac{(-1)^2}{3^{\alpha}}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}\right]+\frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)^{\beta}}\left[\frac{(-1)^2}{3^{\alpha}}+\frac{(-1)^3}{4^{\alpha}}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}\right]\\&\quad+\cdots+\frac{(-1)^1}{2^{\beta}}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}\right]\\&=(-1)^n\left\{\frac{1}{n^{\beta}}\left(\frac{1}{2^{\alpha}}-\frac{1}{3^{\alpha}}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}\right)+\frac{1}{(n-1)^{\beta}}\left(\frac{1}{3^{\alpha}}-\frac{1}{4^{\alpha}}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}\right)+\cdots+\frac{1}{2^{\beta}}\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)\right\}.\end{aligned}$$

因此，得

$$\begin{aligned}|\Delta_n|&=\frac{1}{n^{\beta}}\left(\frac{1}{2^{\alpha}}-\frac{1}{3^{\alpha}}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}\right)+\frac{1}{(n-1)^{\beta}}\left(\frac{1}{3^{\alpha}}-\frac{1}{4^{\alpha}}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}\right)+\cdots+\frac{1}{2^{\beta}}\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)\\&\leqslant\frac{1}{n^{\beta}}\cdot\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{(n-1)^{\beta}}\cdot\frac{1}{3^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{2^{\beta}}\cdot\frac{1}{n^{\alpha}}\\&=\sum_{\substack{i+j=n-2\\ 2\leqslant i,\ j\leqslant n}}\frac{1}{j^{\beta}i^{\alpha}}\leqslant\sum_{\substack{1\leqslant i,\ j\leqslant n+1\\ i+j=n+2}}\frac{1}{i^{\alpha}j^{\beta}}=d^{n+1}.\end{aligned}$$

由前已证：当 $\alpha+\beta>1$ 时，$d_n\to 0$（当 $n\to\infty$时），故有 $\Delta_n\to 0$（当 $n\to\infty$时）. 于是，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(A_nB_n-\Delta_n)=\lim_{n\to\infty}A_n\cdot\lim_{n\to\infty}B_n=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{i^{\alpha}}\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j^{\beta}}\right),$$

其中右端两级数的收敛性是由 $\alpha>0$，$\beta>0$，按莱布尼茨判别法获得的. 于是，当 $\alpha+\beta>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}$（$\alpha>0$）与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}}$（$\beta>0$）的积 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 为收敛级数.

【2715】 验证下面二发散级数

$$1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n \quad 和 \quad 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

的积是绝对收敛级数.

证 记 $1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=\sum\limits_{m=1}^{\infty}u_m$， $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}v_m$，

其中

$$u_1=1,u_2=-\frac{3}{2},u_3=-\left(\frac{3}{2}\right)^2,\cdots,u_m=-\left(\frac{3}{2}\right)^{m-1}\quad(m=2,3,\cdots),$$

$$v_1=1,v_2=2+\frac{1}{2^2},v_3=\frac{3}{2}\left(2^2+\frac{1}{2^3}\right),\cdots,v_m=\left(\frac{3}{2}\right)^{m-2}\left(2^{m-1}+\frac{1}{2^m}\right)\quad(m=2,3,\cdots).$$

因此 $c_1=u_1v_1=1$. 一般地，在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 中，按乘积定义有

$$\begin{aligned}
c_n&=u_1v_n+u_2v_{n-1}+\cdots+u_{n-1}v_2+u_nv_1\\
&=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left(2^{n-1}+\frac{1}{2^n}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{n-3}\left(2^{n-2}+\frac{1}{2^{n-1}}\right)+\cdots+\left[-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\right]\left(2+\frac{1}{2^2}\right)\\
&\quad+\left[-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right]\\
&=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left[(2^{n-1}-2^{n-2}-2^{n-3}-\cdots-2-2^0)+\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n-1}}-\cdots-\frac{1}{2}\right)\right]\\
&=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left[\left(2^{n-1}-\frac{2^{n-1}-1}{2-1}\right)+\left(\frac{1}{2^n}-\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\right)\right]\\
&=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\cdot\frac{3}{2^n}=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1},
\end{aligned}$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ 绝对收敛.

§4. 函数项级数

1° **收敛域** 使函数项级数

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{1}$$

收敛的 x 值的集合 X 叫做此级数的*收敛域*，而函数

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}u_i(x)\quad(x\in X)$$

称为级数的和.

2° **一致收敛性** 对于函数序列

$$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x),\cdots \tag{1'}$$

若：1）存在极限函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)\quad(x\in X);$$

2) 对于任何的数 $\varepsilon>0$，可以确定 $N=N(\varepsilon)$，使得当 $n>N$ 和 $x\in X$ 时，

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

成立，则称此函数序列在集合 X 上一致收敛.

当序列(1′)一致收敛于 $f(x)$ 时，我们使用记号 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$.

若函数项级数(1)的部分和序列：

$$S_n(x)=\sum_{i=1}^{n}u_i(x)\quad(n=1,2,\cdots)$$

在集合 X 上一致收敛，则称级数(1)在此集合上一致收敛.

3° **柯西准则** 级数(1)在集合 X 上一致收敛的充分必要条件为：对于每一个 $\varepsilon>0$，都存在数 $N=N(\varepsilon)$，使得当 $n>N$ 和 $p>0$ 时，不等式

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|=\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}u_i(x)\right|<\varepsilon$$

对一切 $x\in X$ 都成立.

4° **魏尔斯特拉斯判别法** 对于级数(1)，若存在收敛的数项级数

$$c_1+c_2+\cdots+c_n+\cdots,\tag{2}$$

使得对于 $x\in X$ 下列不等式都成立：

$$|u_n(x)|\leqslant c_n\quad(n=1,2,\cdots),$$

则级数(1)在集合 X 上绝对并一致收敛.

5° **阿贝尔判别法** 若：1)级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在集合 X 上一致收敛；2)函数 $b_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 全体是有界的并对每一个 x 组成一单调序列，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)\tag{3}$$

在集合 X 上一致收敛.

6° **狄利克雷判别法** 若：1)级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 的部分和全体是有界的；2)序列 $b_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 对于每一个 x 都是单调的，并且当 $n\to\infty$ 时在 X 上一致地趋于零，则级数(3)在集合 X 上一致收敛.

7° **函数项级数的性质** 1) 以连续函数为项的一致收敛级数的和是连续函数.

2) 若函数项级数(1)在每一个区间 $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$ 上一致收敛且有有限的极限 $\lim\limits_{x\to a}u_n(x)=A_n$ $(n=1,2,\cdots)$，则：ⅰ)级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 收敛，ⅱ)成立等式

$$\lim_{x\to a}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lim_{x\to a}u_n(x)\right].$$

3) 若收敛级数(1)的各项当 $a<x<b$ 时皆连续可微，并且导数的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 在区间 (a,b) 内一致收敛，则

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x).$$

4) 若级数(1)的各项连续，并且此级数在有限区间 (a,b) 内一致收敛，则

$$\int_a^b\left\{\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right\}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.\tag{4}$$

一般说来，若当 $n\to\infty$ 时 $\int_a^b R_n(x)\mathrm{d}x\to 0$，这里 $R_n(x)=\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}u_i(x)$，则公式(4)成立. 最后这个条件也适合于积分限是无穷大的情况.

定出下列函数项级数的绝对收敛域和条件收敛域.

【2716】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$.

提示 令 $y=\frac{1}{x}$.

解 令 $\frac{1}{x}=y$,则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}=\sum_{n=1}^{\infty}ny^n.$$

显然上式右端级数的收敛半径为1.因此,仅当 $|y|=\left|\frac{1}{x}\right|<1$ 即 $|x|>1$ 时,原级数绝对收敛.

【2717】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

解 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{(-1)^n}{2n-1}\right|}{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\right|}=1$,故仅当 $\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1$ 即 $(1-x)^2<(1+x)^2$ 或 $x>0$ 时,级数绝对收敛.

当 $x=0$ 时,原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$,显见它为条件收敛,当 $x<0$ 时,原级数通项不趋于零,故发散.

【2718】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$.

提示 仿2717题的解法.

解 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}}=1$,故仅当 $\left|\frac{x}{2x+1}\right|<1$ 即 $x^2<4x^2+4x+1$ 或

$$(3x+1)(x+1)>0 \tag{1}$$

时,级数绝对收敛.解不等式(1),得

$$x>-\frac{1}{3}\quad 或\quad x<-1,$$

即为所求的绝对收敛域.当 $x=-\frac{1}{3}$ 或 $x=-1$ 时,原级数通项不趋于零,故发散.

【2719】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n$.

解题思路 仿2717题,仅当 $\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|<1$ 或 $|x|\neq 1$ 时,级数绝对收敛.

当 $x=-1$ 时,利用2689题的结果.当 $x=1$ 时,仍利用同题的结果.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{2n+1}=1,$$

故仅当 $\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|<1$ 时,级数绝对收敛.解此不等式:

$$4x^2<1+2x^2+x^4,\quad (x^2-1)^2>0,$$

即 $|x|\neq 1$.于是,当 $|x|\neq 1$ 时,级数绝对收敛.

当 $x=-1$ 时,原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$,由2689题的结果知它是条件收敛的.

当 $x=1$ 时,原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$,仍由同题的结果知它是发散的.

【2720】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{2n}}{2^n} x^n (1-x)^n$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n \cdot 3^{2n}}{2^n}}{\frac{(n+1)3^{2n+2}}{2^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3^2(n+1)} = \frac{2}{9},$$

故仅当 $|x(1-x)|<\frac{2}{9}$ 时,级数绝对收敛.解此不等式:

$$-\frac{2}{9}<x(1-x)<\frac{2}{9}.$$

于是,x 的值应为 $x^2-x-\frac{2}{9}<0$ 及 $x^2-x+\frac{2}{9}>0$ 的公共部分,也即 $-\frac{\sqrt{17}-3}{6}<x<\frac{3+\sqrt{17}}{6}$ 及 $x>\frac{2}{3}$ 或 $x<\frac{1}{3}$ 的公共部分,合并得

$$-\frac{\sqrt{17}-3}{6}<x<\frac{1}{3} \quad 及 \quad \frac{2}{3}<x<\frac{\sqrt{17}+3}{6},$$

此即级数的绝对收敛域.

当在此二区间的端点时,级数显然发散.

【2721】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n}{n^2}}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

故仅当 $|\sin x|<\frac{1}{2}$ 时,级数绝对收敛.解之,得

$$|x-k\pi|<\frac{\pi}{6} \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

当 $|x-k\pi|=\frac{\pi}{6}$ 时,由绝对值组成的级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$,它是收敛的.

因此,当 $|x-k\pi|\leqslant\frac{\pi}{6}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时,级数绝对收敛.

【2722】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^p}$.

解 当 $p>1$ 及 $x\neq k(k=-1,-2,\cdots)$ 时,级数显然绝对收敛.

当 $0<p\leqslant1$ 及 $x\neq k(k=-1,-2,\cdots)$ 时,级数条件收敛.

当 $p\leqslant0$ 时,级数发散.

【2723】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \sin nx}{1+n^q}$ $(q>0;\ 0<x<\pi)$.

解 由于

$$\frac{|\sin nx|}{2n^{q-p}} \leqslant \left|\frac{n^p \sin nx}{1+n^q}\right| \leqslant \frac{1}{n^{q-p}},$$

故当 $q-p>1$ 即 $q>p+1$ 时,级数绝对收敛;而当 $q\leqslant p+1$ 时,由绝对值组成的级数发散(理由可参看 2698 题的题解).

当 $p<q\leqslant p+1$ 时,由于对 $0<x<\pi$ 内任一固定的 x,$\sum_{k=1}^{\infty}\sin kx$ 有界,且 $\frac{n^p}{1+n^q}\sim\frac{1}{n^{q-p}}\to0$ (当 $n\to\infty$ 时),故级数收敛.

当 $q\leqslant p$ 时，级数显然发散.

总之，当 $q>p+1$ 时，级数绝对收敛；而当 $p<q\leqslant p+1$ 时，级数条件收敛.

【2724】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$ （兰伯特级数）.

解 考虑级数 (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$ 与 (2) $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$.

当 $|x|<1$ 时，级数(2)绝对收敛. 根据阿贝尔判别法，以单调递减且有下界的因子 $\frac{1}{1-x^{2n}}$ 乘此级数的对应项所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^{2n}} \tag{3}$$

也收敛，且为绝对收敛.

同理，再以单调递减且有界的因子 x^n 乘级数(3)的对应项所得的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{1-x^{2n}}$ 仍然收敛，且为绝对收敛. 由于

$$\frac{x^n}{1-x^n}=\frac{x^n}{1-x^{2n}}+\frac{x^{2n}}{1-x^{2n}},$$

故原级数当 $|x|<1$ 时绝对收敛.

当 $|x|=1$ 时，级数(1)显然无意义.

当 $|x|>1$ 时，级数(2)显然发散. 下证级数(1)也发散. 若不然，当 $|x|>1$ 时，由级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}$$

收敛，再根据阿贝尔判别法，我们就会推出级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}$ 也收敛. 从而会得出

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}-\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}1$$

也收敛，这是错误的. 因此，当 $|x|>1$ 时，级数(1)发散.

【2725】 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x(x+n)}{n}\right]^n$.

解 记 $a_n=\left[\frac{x(x+n)}{n}\right]^n=x^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$，则当 $|x|>1$ 时，显然 $a_n\to+\infty$（当 $n\to\infty$ 时），故级数发散. 当 $|x|=1$ 时，$|a_n|\to e^{\pm1}\neq0$（当 $n\to\infty$，$x=\pm1$ 时），故级数也发散. 当 $|x|<1$ 时，由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(|x|\cdot\left|1+\frac{x}{n}\right|\right)=|x|<1,$$

故级数绝对收敛.

【2726】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

解 记 $a_n=\frac{x^n}{1+x^{2n}}$，则当 $|x|<1$ 时，有 $|a_n|\leqslant|x|^n$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}|x|^n$ 收敛，故当 $|x|<1$ 时，原级数绝对收敛.

当 $|x|=1$ 时，$|a_n|=\frac{1}{2}$ 它不趋于零，故原级数发散.

当 $|x|>1$ 时，原级数可写为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}$. 由于 $\left|\frac{1}{x}\right|<1$，再根据上面的讨论，故原级数绝对收敛.

总之，当$|x|\neq1$时，原级数绝对收敛.

【2727】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$.

解 记$a_n=\dfrac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$，则当$|x|<1$时，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{|1+x^{n+1}|}=|x|<1,$$

故级数绝对收敛.

当$|x|>1$时，级数可写为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{\frac{n(1-n)}{2}}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)},\tag{1}$$

其中级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$当$|x|>1$即$\left|\dfrac{1}{x}\right|<1$时绝对收敛. 与$|x|<1$的情况一样，得知级数(1)当$|x|>1$时绝对收敛.

当$x=-1$时，通项无意义. 但当$x=1$时，原级数的通项$a_n=\dfrac{1}{2^n}$，显然级数收敛.

总之，当$x\neq-1$时，原级数绝对收敛.

【2728】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)e^{-(n+1)x}}{ne^{-nx}}=e^{-x},$$

故当$x>0$时，$e^{-x}<1$，级数绝对收敛，而当$x=0$时，级数可写为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$，显然发散. 又当$x<0$时，$e^{-x}>1$，级数发散.

【2729】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}\dfrac{1}{1+a^{2n}x^2}$.

解 记$a_n=\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}\dfrac{1}{1+a^{2n}x^2}$，则当$x=0$时，$a_n=\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}>\dfrac{1}{\sqrt[n]{n^n}}=\dfrac{1}{n}$，故原级数发散.

当$x\neq0$时：

(1) 当$|a|>1$时，有$0<a_n<\dfrac{1}{a^{2n}x^2}=\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{|a|}\right)^{2n}$，由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{|a|}\right)^{2n}$的收敛性即知，原级数绝对收敛.

(2) 当$|a|\leqslant1$时，有$|a_n|\geqslant\dfrac{1}{1+x^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}>\dfrac{1}{1+x^2}\cdot\dfrac{1}{n}$，故原级数发散.

【2730】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2-x)(2-x^{\frac{1}{2}})(2-x^{\frac{1}{3}})\cdots(2-x^{\frac{1}{n}})\ (x>0)$.

解 记$a_n=(2-x)(2-x^{\frac{1}{2}})\cdots(2-x^{\frac{1}{n}})$.

(1) 当$x=2$时，显然$a_n=0(n=1,2,\cdots)$，故级数绝对收敛.

(2) 当$x\neq2$时，注意$x>0$，故有$x^{\frac{1}{n}}\to1$(当$n\to\infty$). 因此，当n足够大时，a_n不变号，从而，若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则必绝对收敛. 今用拉比判别法，有

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(x^{\frac{1}{n+1}}-1)}{2-x^{\frac{1}{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^{\frac{1}{n+1}}-1}{\frac{1}{n+1}}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{2-x^{\frac{1}{n+1}}}\right)=\ln x,$$

故当$\ln x>1$即$x>e$时，原级数绝对收敛. 当$x<e$时，原级数发散，而当$x=e$时，此时有(考虑当n足够大时)

$$\frac{a_{n-1}}{a_n}=\frac{1}{2-e^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{1-(e^{\frac{1}{n}}-1)}=1+(e^{\frac{1}{n}}-1)+O\left((e^{\frac{1}{n}}-1)^2\right),$$

但 $e^{\frac{1}{n}}-1=\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$，故得

$$\frac{a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

按高斯判别法，原级数发散.

总之，当 $x=2$ 及当 $x>e$ 时，原级数绝对收敛.

【2731】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$.

解 对于任意的 x，只要 n 足够大，该项就为正. 因此，它可以看成正项级数. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}}{\frac{1}{n^x}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x,$$

故利用正项级数的判别法知：当 $x>1$ 时，级数收敛，且为绝对收敛；当 $x\leqslant 1$ 时，级数发散.

【2732】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n y^n}{x^n+y^n}\quad(x>0,\ y>0)$.

解 若 $x<1$，将原级数写成

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^n}.$$

由于 $0<\dfrac{x^n}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^n}\leqslant x^n$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$ 当 $|x|<1$ 时收敛，故原级数绝对收敛.

同理，当 $y<1$ 时，故级数绝对收敛.

总之，当 $0<\min(x,y)<1$ 时，原级数绝对收敛.

【2733】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+y^n}\quad(y\geqslant 0)$.

解 记 $a_n=\dfrac{x^n}{n+y^n}\ (y\geqslant 0)$.

(1) 当 $|x|<1$ 时，易见 $|a_n|\leqslant|x|^n\ (n=1,2,\cdots)$. 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x|^n$ 的收敛性知原级数绝对收敛.

(2) 当 $x=1$ 时，(ⅰ)若 $y>1$，则由 $|a_n|=\dfrac{1}{n+y^n}<\left(\dfrac{1}{y}\right)^n$，易见原级数绝对收敛，(ⅱ)若 $0\leqslant y\leqslant 1$，由于 $\dfrac{a_n}{\frac{1}{n}}=\dfrac{n}{n+y^n}\to 1$（当 $n\to\infty$ 时），易见原级数发散.

(3) 当 $x=-1$ 时，(ⅰ)若 $y>1$，由 $|a_n|=\dfrac{1}{n+y^n}<\left(\dfrac{1}{y}\right)^n\ (n=1,2,\cdots)$，易见原级数绝对收敛.(ⅱ)若 $0\leqslant y\leqslant 1$，由 $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n+y^n}\ (n=1,2,\cdots)$，易见原级数条件收敛.

(4) 当 $|x|>1$ 时，(ⅰ)若 $y=0$，则由 $a_n=\dfrac{x^n}{n}\ (n=1,2,\cdots)$，易见原级数发散.(ⅱ)若 $y>0$，则当 $\left|\dfrac{x}{y}\right|<1$ 即 $|x|<y$ 时，有 $|a_n|=\dfrac{|x|^n}{n+y^n}<\left|\dfrac{x}{y}\right|^n$，故原级数绝对收敛. 当 $\left|\dfrac{x}{y}\right|\geqslant 1$ 时，若 $y>1$，有 $|a_n|=\left|\dfrac{x}{y}\right|^n\cdot\dfrac{1}{1+\frac{n}{y^n}}\to+\infty$（当 $n\to\infty$ 时）；若 $0<y\leqslant 1$，有 $|a_n|>\dfrac{|x|^n}{n+1}\to+\infty$（当 $n\to\infty$ 时），故当 $\left|\dfrac{x}{y}\right|\geqslant 1$ 时，原级数发散.

总之，当$|x|<1$，$0\leqslant y<+\infty$；当$|x|=1$，$y>1$及当$|x|>1$，$|x|<y$时，原级数绝对收敛. 当$x=-1$，$0\leqslant y\leqslant 1$时，原级数条件收敛.

【2734】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{|x|^{n^2}+|y|^{n^2}}$.

提示 注意

$$a_n=\sqrt[n]{\left(\frac{|x|}{\max(|x|,|y|)}\right)^{n^2}+\left(\frac{|y|}{\max(|x|,|y|)}\right)^{n^2}}\cdot\left[\max(|x|,|y|)\right]^n$$

及$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\max(|x|,|y|)$.

解 由于

$$a_n=\sqrt[n]{|x|^{n^2}+|y|^{n^2}}=\sqrt[n]{\left(\frac{|x|}{\max(|x|,|y|)}\right)^{n^2}+\left(\frac{|y|}{\max(|x|,|y|)}\right)^{n^2}}\cdot(\max(|x|,|y|))^n$$

及$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\max(|x|,|y|)$，故当$\max(|x|,|y|)<1$时，级数绝对收敛；当$\max(|x|,|y|)>1$时，级数发散；当$\max(|x|,|y|)=1$时，由于$a_n\to 1$（当$n\to\infty$），故级数发散.

【2735】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+x^n)}{n^y}$ $(x\geqslant 0)$.

解 (1) 当$0\leqslant x<1$时，此级数可与级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^y}$相比，它们具有相同的敛散性. 事实上$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x^n)}{x^n}=1$，且这两个级数均为正项级数. 对于正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^y}, \tag{1}$$

其通项$\frac{x^n}{n^y}\leqslant n^{|y|}x^n=b_n(n=1,2,\cdots)$，但因$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=x<1$，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，且为绝对收敛. 因此，级数(1)绝对收敛，从而，原级数也是绝对收敛的.

(2) 当$x=1$时，级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln 2}{n^y}$. 于是，当$y>1$时收敛，且为绝对收敛；当$y\leqslant 1$时发散.

(3) 当$x>1$时，原级数的通项可写成

$$\frac{\ln(1+x^n)}{n^y}=\frac{\ln x^n\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{n^y}=\frac{\ln x}{n^{y-1}}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{n^y}.$$

由上式右端第一项所组成的级数当$y-1>1$即$y>2$时收敛，而当$y\leqslant 2$时发散. 由上式右端第二项所组成的级数，利用$0<\frac{1}{x}<1$及最初讨论的结果. 得知它对任意的y值均收敛. 因此，原级数当$x>1$，$y>2$时收敛，且为绝对收敛.

总之，当$0\leqslant x<1$，$-\infty<y<+\infty$；当$x=1$，$y>1$及当$x>1$，$y>2$时，原级数绝对收敛.

【2736】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan^n\left(x+\frac{y}{n}\right)$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\tan^n\left(x+\frac{y}{n}\right)\right|}=|\tan x|,$$

故当$|x-k\pi|<\frac{\pi}{4}$（其中k为整数时），$|\tan x|<1$，从而级数绝对收敛. 而当$|x-k\pi|\geqslant\frac{\pi}{4}$时，由于$\tan^n\left(x+\frac{y}{n}\right)\to\infty$，故级数发散.

【2737】 证明：若洛朗级数$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}a_nx^n$当$x=x_1$和$x=x_2$($|x_1|<|x_2|$)时收敛，则此级数当$|x_1|<|x|<|x_2|$时也收敛.

证明思路 注意级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx_1^n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{-n}x_1^{-n}$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx_2^n$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{-n}x_2^{-n}$均收敛，由此只要证明级数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^{-n}$ 的收敛性（当 $|x_1|<|x|<|x_2|$）.

证 由于洛朗级数当 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 时收敛，故级数

$$(1)\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n,\quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x_1^{-n},\quad (3)\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n,\quad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x_2^{-n}$$

均收敛. 于是，由(3)知，当 $|x|<|x_2|$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛. 由(2)知，当 $\left|\frac{1}{x}\right|<\left|\frac{1}{x_1}\right|$ 即当 $|x_1|<|x|$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^{-n}$ 收敛. 因而，当 $|x_1|<|x|<|x_2|$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^{-n}$ 均收敛，也即 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ 收敛.

【2738】 求洛朗级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{2^{|n|}} x^n$ 的收敛域并求它的和.

解 考虑级数 $(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n$， $(2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{2^n} x^{-n}$.

显然仅当 $|x|<2$ 时，级数(1)收敛；仅当 $|x|>\frac{1}{2}$ 时，级数(2)收敛. 因此，当 $\frac{1}{2}<|x|<2$ 时，原级数收敛.

当 $\frac{1}{2}<|x|<2$ 时，记级数(1)的和为 $S_+(x)$，级数(2)的和为 $S_-(x)$. 显然有

$$S_-(x)=-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{-n}=-S_+\left(\frac{1}{x}\right).$$

今求 $S_+(x)$. 注意当 $\frac{1}{2}<|x|<2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2^n} x^n$，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n$ 均收敛，且有

$$\begin{aligned}S_+(x)&=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2^n} x^n+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n=\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{2^{m+1}} x^{m+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\\&=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n+\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{x}{2}S_+(x)+\frac{x}{2-x},\end{aligned}$$

得 $S_+(x)=\dfrac{\frac{x}{2-x}}{1-\frac{x}{2}}=\dfrac{2x}{(2-x)^2}$. 从而，$S_-(x)=-\dfrac{2\cdot\frac{1}{x}}{\left(2-\frac{1}{x}\right)^2}=-\dfrac{2x}{(2x-1)^2}$，

故当 $\frac{1}{2}<|x|<2$ 时，有

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{2^{|n|}} x^n=S_+(x)+S_-(x)=2x\left[\frac{1}{(2-x)^2}-\frac{1}{(2x-1)^2}\right]=\frac{6x(x^2-1)}{(2-x)^2(2x-1)^2}.$$

【2739】 求牛顿级数的绝对收敛域与条件收敛域：

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{[n]}}{n!};\quad (2)^+\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}\frac{x^{[n]}}{n!};\quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ex)^n y^{[n]}}{n^n},$$

其中 $x^{[n]}=x(x-1)\cdots[x-(n-1)]$.

解 (1)由 2700 题的结果知，当 $x\geqslant 0$ 时，级数绝对收敛；当 $-1<x<0$ 时，级数条件收敛.

(2)由于

$$\begin{aligned}x^{[n]}&=x(x-1)\cdots[x-(n-1)]=(-1)^{n-1}(n-1-x)(n-2-x)\cdots(2-x)(1-x)x\\&=-(-1)^{n-1}(n+t)(n-1+t)\cdots(3+t)(2+t)(1+t),\end{aligned}$$

其中 $t=-(1+x)$，故原级数可以改写为

$$-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(1+t)(2+t)\cdots(n+t)}{n!n^p}.$$

利用 2699 题的结果知：当 $p>t+1$ 即 $p>-x$ 时，原级数绝对收敛. 当然，当 $x=0,1,2,\cdots$ 时，原级数也绝对收敛. 当 $t<p\leqslant t+1$ 即 $-(1+x)<p\leqslant -x$ 时，原级数条件收敛.

(3) 令 $t=-(1+y)$，则有 $y^{[n]}=(-1)^n(1+t)(2+t)\cdots(n+t)$. 记 $a_n=\dfrac{(ex)^n y^{[n]}}{n^n}$. 显然，当 x 为任意数，$y=0,1,2,\cdots$ 时，$a_n=0(n=1,2,\cdots)$. 于是，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛. 研究一下 $y\neq k\ (k=0,1,2,\cdots)$ 的情形，有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=-\frac{n+1}{n+1+t}\cdot\frac{1}{ex}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=-\frac{n+1}{n-y}\cdot\frac{1}{ex}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

(i) 当 $|x|<1$ 时，由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left[\left|\frac{n+1}{n-y}\right|\cdot\frac{1}{e|x|}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]=\frac{1}{|x|}>1,$$

故此时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.

(ii) 当 $|x|>1$ 且 n 充分大时，有 $|a_n|<|a_{n+1}|$，故 $a_n\not\to 0$，从而，原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

(iii) 当 $|x|=1$ (考虑 n 足够大时)，有

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{n+1}{n-y}\cdot\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=\left[1+\frac{1+y}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\left[1-\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=1+\frac{1+\left(y-\frac{1}{2}\right)}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

于是，1) 当 $y>\frac{1}{2}$ 时，由高斯判别法知，此时级数绝对收敛. 2) 当 $y\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散. 但当 $|y|<\frac{1}{2}$ 时，有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=-\frac{1}{x}\left[1+\frac{\mu}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right],$$

其中 $0<\mu<1$. 显然，当 $x=-1$ 时，a_n 不变号，因此，可看成正项级数，且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\mu}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

由高斯判别法知，此时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散；当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为交错级数，且当 n 足够大时，

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1+\frac{\mu}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)>1,$$

也即 $|a_n|$ 单调下降. 此外，还有

$$|a_n|=|y|(1-y)(2-y)\cdots(n-1-y)\frac{e}{n^n}=e|y|\frac{1-y}{n}\,\frac{2-y}{n}\cdots\frac{n-1-y}{n}\cdot\frac{1}{n}<\frac{e|y|}{n}\to 0\quad(n\to\infty).$$

由莱布尼茨判别法知，当 $x=1,|y|<\frac{1}{2}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛.

总之，当：(1) $|x|<1$，y 为任意数；(2) $|x|=1$，$y>\frac{1}{2}$；(3) x 为任意数，$y=0,1,2,\cdots$ 时，原级数绝对收敛. 当 $x=1,|y|<\frac{1}{2}$ 时，原级数条件收敛.

【2740】 证明：若狄利克雷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^x}$ 当 $x=x_0$ 收敛，则此级数当 $x>x_0$ 时也收敛.

证明思路 注意 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_n}{n^{x_0}}\cdot\dfrac{1}{n^{x-x_0}}\right)$，并利用阿贝尔判别法.

证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_n}{n^{x_0}}\cdot\dfrac{1}{n^{x-x_0}}\right)$. 由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^{x_0}}$ 收敛，并且 $\dfrac{1}{n^{x-x_0}}$ 当 $x>x_0$ 时单调下降趋于零，故根据阿贝尔判别法即知：当 $x>x_0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^x}$ 收敛.

【2741】 证明：序列 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 在集合 X 上一致收敛于极限函数 $f(x)$ 的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\{\sup_{a<x<b}\gamma_n(x)\}=0,$$

式中　$\gamma_n(x)=|f(x)-f_n(x)|$.

提示　利用一致收敛的定义即获证.

证　先证必要性.

由于 $f_n(x)$ 在集合 X 上一致收敛于 $f(x)$，故对任给的 $\varepsilon>0$，总存在 $N(\varepsilon)>0$，使当 $n>N(\varepsilon)$ 时，对于集合 X 上的一切 x 值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此，当 $n>N(\varepsilon)$ 时，有 $\sup\limits_{a<x<b}\{\gamma_n(x)\}\leqslant\varepsilon$，从而，$\lim\limits_{n\to\infty}\{\sup\limits_{a<x<b}\gamma_n(x)\}=0$.

再证充分性.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\{\sup\limits_{a<x<b}\gamma_n(x)\}=0$，故对任给的 $\varepsilon>0$，总存在 $N(\varepsilon)>0$，使当 $n>N(\varepsilon)$ 时，有

$$\sup_{a<x<b}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

于是，对于集合 X 上的一切 x 值，只要当 $n>N(\varepsilon)$ 时，就有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$ 在集合 X 上一致收敛于 $f(x)$.

【2742】　序列 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$. (1) 在区间 $(x_0,+\infty)$ 上收敛；(2) 在每一个有限的区间 $(a,b)\subset(x_0,+\infty)$ 上一致收敛；(3) 在区间 $(x_0,+\infty)$ 上一致收敛，这分别是什么意思？

解　(1) 对于任意的 $\varepsilon>0$ 及任意的 $x_0<x<+\infty$，都存在一个正整数 $N=N(\varepsilon,x)$，使得当 $n>N$ 时，恒有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

则称序列 $f_n(x)$ 在区间 $(x_0,+\infty)$ 上收敛. 要注意的是，N 不仅与 ε 有关，而且与值 x 有关.

(2) 对每一个 $(a,b)\subset(x_0,+\infty)$，如果对于任给的 $\varepsilon>0$，存在一个 $N=N(\varepsilon,a,b)$，使当 $n>N$ 时，对于 (a,b) 内的一切 x 值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

则称 $f_n(x)$ 在 (a,b) 上一致收敛.

(3) 如果对于任给的 $\varepsilon>0$，都存在正整数 $N=N(\varepsilon)$（$N(\varepsilon)$ 仅与 ε 有关），使当 $n>N$ 时，对所有的 $x_0<x<+\infty$，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

则称 $f_n(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上一致收敛.

【2743】　对于序列

$$f_n(x)=x^n\quad(n=1,2,\cdots)\ (0<x<1)$$

求出其项的最小序号 $N=N(\varepsilon,x)$，使从这项起序列的项在已知点 x 与极限函数的差不超过 0.001，设 $x=\frac{1}{10},\frac{1}{\sqrt{10}},\cdots,\frac{1}{\sqrt[m]{10}},\cdots$. 此序列在已知区间 $(0,1)$ 内是否一致收敛？

解　显见极限函数为零. 于是，考虑

$$|x^n-0|<\varepsilon,$$

其中 $\varepsilon=0.001$. 当 $0<x<1$ 时，上式即 $x^n<\varepsilon$ 或 $n>\frac{\lg\varepsilon}{\lg x}$，故最小序号为 $N=\left[\frac{\lg\varepsilon}{\lg x}\right]$.

$$\text{当 } x=\frac{1}{10}\text{ 时，}N=3;\quad \text{当 } x=\frac{1}{\sqrt{10}}\text{ 时，}N=6;\quad\cdots;\quad \text{当 } x=\frac{1}{\sqrt[m]{10}}\text{ 时，}N=3m;\quad\cdots$$

下面研究此序列在 $(0,1)$ 内的一致收敛性. 由于当 x 趋于 1 时，$\lg x$ 趋于零，故

$$\frac{\lg\varepsilon}{\lg x}\to+\infty\quad(0<\varepsilon<1,\ x\to1-0),$$

即 $\frac{\lg\varepsilon}{\lg x}$ 无限增加. 因此，不可能找到一个公共的 N（它仅与 ε 有关）值，使当 $n>N$ 时，对于 $(0,1)$ 内的一切 x

值，均有 $x^n<\varepsilon$. 因此，序列

$$f_n(x)=x^n \quad (n=1,2,\cdots)\ (0<x<1)$$

在区间(0,1)内不一致收敛.

【2744】 应当取级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n(n+1)}$ 的多少项方可使部分和 $S_n(x)$ 当 $-\infty<x<+\infty$ 时与级数的和之差小于 ε? 对于下列 ε 值，给出具体的计算结果：

(1) $\varepsilon=0.1$；　(2) $\varepsilon=0.01$；　(3) $\varepsilon=0.001$.

解 易证此级数收敛，记其和为

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n(n+1)}.$$

如果取 n 值，其部分和为 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k(k+1)}$. 要使其误差 $\Delta_n(x)=|S(x)-S_n(x)|$ 小于 ε. 问项数 n 为若干? 可用下列估计法：

$$\Delta_n(x)=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k(k+1)}\right|=\left|\lim_{N\to\infty}\sum_{k=n+1}^{N}\frac{\sin kx}{k(k+1)}\right|\leqslant\lim_{N\to\infty}\sum_{k=n+1}^{N}\frac{|\sin kx|}{k(k+1)}\leqslant\lim_{N\to\infty}\sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k(k+1)}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=n+1}^{N}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{N+1}\right)=\frac{1}{n+1}.$$

若令 $\frac{1}{n+1}<\varepsilon$，也即当 $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$ 时就有 $\Delta_n(x)<\varepsilon$. 记 $N_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当

$$n>\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+\left\{\frac{1}{\varepsilon}\right\}-1=N_0-\left(1-\left\{\frac{1}{\varepsilon}\right\}\right)$$

时，即有 $\Delta_n(x)<\varepsilon$，其中 $\left\{\frac{1}{\varepsilon}\right\}$ 表示 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的零头部分. 也即可取

$$n=N_0,N_0+1,N_0+2,\cdots$$

均有 $\Delta_n(x)<\varepsilon$. 所取的项数 N_0 与 ε 的关系，按题设数值，可有

ε	(1)0.1	(2)0.01	(3)0.001
N_0	10	100	1000

【2745】⁺ 对怎样的 n，不等式 $\left|e^x-\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right|<0.001\ (0\leqslant x\leqslant 10)$ 能保证成立?

解 由泰勒公式，有

$$\Delta_n(x)=\left|e^x-\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right|=\left|\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\leqslant\frac{e^{10}}{(n+1)!}10^{n+1},$$

其中 $0<\theta<1$. 要 $\Delta_n(x)<0.001$，只要 $\frac{e^{10}}{(n+1)!}10^{n+1}<\frac{1}{1000}$. 也即要求 n，使 $e^{10}10^{n+4}<(n+1)!$. 为此，两边取对数，有

$$10+(n+4)\ln 10<\sum_{k=2}^{n+1}\ln k=p_n. \tag{1}$$

注意到 $p_n>\int_1^{n+1}\ln t\,dt=(n+1)\ln(n+1)-n$. 若能有

$$(n+1)\ln(n+1)>n(1+\ln 10)+10+4\ln 10, \tag{2}$$

就可保证(1)式成立，从而，$\Delta_n(x)<0.001$. 为解(2)中的 n，可用估算法，例如，当 $n=39$ 时，(2)式就成立，故对于 n 取 39，即取 39 项时就能保证 $\left|e^x-\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right|<0.001\ (0\leqslant x\leqslant 10)$.

研究序列在所给区间上的一致收敛性：

【2746】 $f_n(x)=x^n$；(1) $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$；(2) $0\leqslant x\leqslant 1$.

提示 (1)一致收敛于零.(2)收敛而不一致收敛.取 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$ 及 $x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$(不论 n 多大)即可证不一致收敛.

解 (1) 当 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x)$. 任给 $\varepsilon>0$,由于

$$|f_n(x)-f(x)|=|x|^n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

故要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$,只要 $\frac{1}{2^n}<\varepsilon$,即只要 $n>\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln2}$. 取 $N=\left[\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln2}\right]$,则当 $n\geqslant N$ 时,对于 $[0,\frac{1}{2}]$ 上的一切 x 值,均有

$$|f_n(x)-f(x)|=|f_n(x)-0|<\varepsilon.$$

因此,$f_n(x)=x^n$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上一致收敛于零.

(2) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}1, & x=1,\\ 0, & 0\leqslant x<1.\end{cases}$ 取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$,不论 n 多么大,只要取 $x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$,就有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)-f\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)\right|=\frac{1}{2}>\varepsilon_0.$$

因此,$f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上收敛而不一致收敛.

【2747】 $f_n(x)=x^n-x^{n+1}$; $0\leqslant x\leqslant1$.

解 当 $x=0$ 或 1 时,$f_n(x)=0$;当 $0<x<1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$. 因此,当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x)$,并有

$$|f_n(x)-f(x)|=x^n-x^{n+1}=g(x).$$

由于 $g'(x)=x^{n-1}[n-(n+1)x]$,故若令 $g'(x)=0$,即求得 $x=\frac{n}{n+1}$. 显然,当 $0<x<\frac{n}{n+1}$ 时,$g'(x)>0$;当 $\frac{n}{n+1}<x<1$ 时,$g'(x)<0$,故 $g(x)$ 在 $x=\frac{n}{n+1}$ 达到 $[0,1]$ 上的最大值. 于是,对于 $0\leqslant x\leqslant1$,有

$$g(x)\leqslant\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n+1}.$$

任给 $\varepsilon>0$,要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$,只要 $\frac{1}{n+1}<\varepsilon$,即只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$. 取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$,则当 $n>N$ 时,对于 $[0,1]$ 上的一切 x 值,均有

$$|f_n(x)-f(x)|=|f_n(x)-0|<\varepsilon.$$

因此,$f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于零.

【2748】 $f_n(x)=x^n-x^{2n}$; $0\leqslant x\leqslant1$.

提示 收敛而不一致收敛.取 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{4}$ 及 $x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$(不论 n 多大)即可证不一致收敛.

解 当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x)$, 并有

$$|f_n(x)-f(x)|=x^n-x^{2n}.$$

取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{4}$,不论 n 多么大,只要取 $x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$,就有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)-f\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)\right|=\frac{1}{4}>\varepsilon_0.$$

因此,$f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上收敛而不一致收敛.

【2749】 $f_n(x)=\frac{1}{x+n}$; $0<x<+\infty$.

提示 利用一致收敛的定义,可知 $f_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛于零.

解 当 $0<x<+\infty$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x)$, 并有

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{x+n}<\frac{1}{n}.$$

任给 $\varepsilon>0$,要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$,只要 $\frac{1}{n}<\varepsilon$,即只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$. 取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$,则当 $n>N$ 时,对于 $x>0$ 的一切 x 值,均有

$$|f_n(x)-f(x)|=|f_n(x)-0|<\varepsilon.$$

因此,$f_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内一致收敛于零.

【2750】 $f_n(x)=\frac{nx}{1+n+x}$; $0\leqslant x\leqslant 1$.

提示 利用一致收敛的定义,可知 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 x.

解 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=x=f(x)$,并有

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{nx}{1+n+x}-x\right|=\frac{x+x^2}{1+n+x}<\frac{2}{n+1}<\frac{2}{n}.$$

任给 $\varepsilon>0$,要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$,只要 $n>\frac{2}{\varepsilon}$. 取 $N=[\frac{2}{\varepsilon}]$,则当 $n>N$ 时,对于 $[0,1]$ 上的一切 x 值,均有

$$|f_n(x)-f(x)|=|f_n(x)-x|<\varepsilon.$$

因此,$f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 x.

【2751】 $f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$; (1) $0\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon$; (2) $1-\varepsilon\leqslant x\leqslant 1+\varepsilon$; (3) $1+\varepsilon\leqslant x<+\infty$, 其中 $\varepsilon>0$.

解 (1) 当 $0\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x)$, 并有

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{x^n}{1+x^n}<(1-\varepsilon)^n.$$

任给 $\varepsilon'>0$,要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon'$,只要 $(1-\varepsilon)^n<\varepsilon'$,即只要 $n>\frac{\lg\varepsilon'}{\lg(1-\varepsilon)}$. 取 $N=[\frac{\lg\varepsilon'}{\lg(1-\varepsilon)}]$,则当 $n>N$ 时,对于 $[0,1-\varepsilon]$ 上的一切 x 值,均有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon'$. 因此,$f_n(x)$ 在 $[0,1-\varepsilon]$ 上一致收敛于零.

(2) $$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}0, & 1-\varepsilon\leqslant x<1,\\ \frac{1}{2}, & x=1,\\ 1, & 1<x\leqslant 1+\varepsilon.\end{cases}$$

取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{3}$,不论 n 多么大,只要取 $x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$,就有

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{3}>\varepsilon_0.$$

因此,$f_n(x)$ 在 $[1-\varepsilon,1+\varepsilon]$ 上收敛而不一致收敛.

(3) 当 $1+\varepsilon\leqslant x<+\infty$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=1=f(x)$, 并有

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{1+x^n}<\frac{1}{(1+\varepsilon)^n}.$$

任给 $\varepsilon'>0$,要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon'$,只要 $\frac{1}{(1+\varepsilon)^n}<\varepsilon'$,即只要 $n>\frac{\lg\frac{1}{\varepsilon'}}{\lg(1+\varepsilon)}$. 取 $N=\left[\frac{\lg\frac{1}{\varepsilon'}}{\lg(1+\varepsilon)}\right]$,则当 $n>N$ 时,对于 $x\geqslant 1+\varepsilon$ 的一切 x 值,均有

$$|f_n(x)-f(x)|=|f_n(x)-1|<\varepsilon'.$$

因此,$f_n(x)$ 在 $[1+\varepsilon,+\infty)$ 上一致收敛于数 1.

【2752】 $f_n(x)=\frac{2nx}{1+n^2x^2}$; (1) $0\leqslant x\leqslant 1$; (2) $1<x<+\infty$.

解 (1) 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x)$. 取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<1$,不论 n 多么大,只要取 $x=\frac{1}{n}$,就有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=1>\varepsilon_0.$$

因此，$f_n(x)$在$[0,1]$上不一致收敛.

(2)当 $1<x<+\infty$时，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x)$，并有

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{2nx}{1+n^2x^2}<\frac{2nx}{n^2x^2}<\frac{2}{n}.$$

任给 $\varepsilon>0$，要使$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，只要 $n>\frac{2}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于 $x>1$ 的一切 x 值，均有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. 因此，$f_n(x)$在$(1,+\infty)$上一致收敛.

【2753】 $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$；$-\infty<x<+\infty$.

解 当$-\infty<x<+\infty$时，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=|x|=f(x)$，并有

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{x^2+\frac{1}{n^2}-x^2}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|}<\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}.$$

任给 $\varepsilon>0$，要使$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于一切实数 x，均有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. 因此，$f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

【2754】 $f_n(x)=n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)$；$0<x<+\infty$.

解 当 $0<x<+\infty$时，

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left[\left(x+\frac{1}{n}\right)-x\right]}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=f(x).$$

若取 $x=\frac{1}{n}$，则有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\left|n\left(\sqrt{\frac{2}{n}}-\sqrt{\frac{1}{n}}\right)-\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{n}}}\right|$$

$$=\sqrt{n}\left|\sqrt{2}-1-\frac{1}{2}\right|=\sqrt{n}\frac{\sqrt{2}-1}{2(\sqrt{2}+1)}=\frac{\sqrt{n}}{2(\sqrt{2}+1)^2}>\frac{1}{18}\sqrt{n}.$$

当 n 充分大时，它就可以大于指定的 $\varepsilon_0>0$. 因此，$f_n(x)$在$(0,+\infty)$上收敛而不一致收敛.

【2755】 (1) $f_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$；$-\infty<x<+\infty$； (2) $f_n(x)=\sin\frac{x}{n}$；$-\infty<x<+\infty$.

提示 (1)一致收敛. (2)收敛而不一致收敛. 取 $0<\varepsilon_0<1$ 及 $x=\frac{n\pi}{2}$(不论 n 多大)即可证不一致收敛.

解 (1) 当$-\infty<x<+\infty$时，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x)$，并有

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{|\sin nx|}{n}\leqslant\frac{1}{n}.$$

任给 $\varepsilon>0$，要使$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于一切实数 x，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

(2)当$-\infty<x<+\infty$时，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x)$. 取 ε_0 使$0<\varepsilon_0<1$，不论 n 多么大，只要取 $x=\frac{n\pi}{2}$，就有

$$\left|f_n\left(\frac{n\pi}{2}\right)-f\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right|=1>\varepsilon_0.$$

因此，$f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$上收敛而不一致收敛.

【2756】 (1) $f_n(x)=\arctan nx$；$0<x<+\infty$； (2) $f_n(x)=x\arctan nx$；$0<x<+\infty$.

解 (1) 当$0<x<+\infty$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\arctan nx=\frac{\pi}{2}=f(x)$. 取$\varepsilon_0$使$0<\varepsilon_0<\frac{\pi}{4}$，不论$n$多么大，只要取$x=\frac{1}{n}$，就有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\left|\arctan 1-\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{4}>\varepsilon_0.$$

因此，$f_n(x)$在$(0,+\infty)$上收敛而不一致收敛.

(2) 当$0<x<+\infty$时，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\frac{\pi}{2}x=f(x)$，并有

$$|f_n(x)-f(x)|=x\left|\arctan nx-\frac{\pi}{2}\right|=x\left|-\arctan\frac{1}{nx}\right|\leqslant x\cdot\frac{1}{nx}=\frac{1}{n}.$$

任给$\varepsilon>0$，要使$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，只要$n>\frac{1}{\varepsilon}$. 取$N=[\frac{1}{\varepsilon}]$，则当$n>N$时，对于$x>0$的一切$x$值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$在$(0,+\infty)$上一致收敛.

【2757】 $f_n(x)=e^{n(x-1)}$；$0<x<1$.

提示 显见$f_n(x)$在$(0,1)$上收敛. 但若取$0<\varepsilon_0<e^{-1}$，不论n多大，只要取$x=1-\frac{1}{n}$，即可知$f_n(x)$在$(0,1)$上不一致收敛.

解 当$0<x<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x)$. 取$\varepsilon_0$使$0<\varepsilon_0<e^{-1}$，不论$n$多么大，只要取$x=1-\frac{1}{n}$，就有

$$\left|f_n\left(1-\frac{1}{n}\right)-f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right|=e^{n(1-\frac{1}{n}-1)}=e^{-1}>\varepsilon_0.$$

因此，$f_n(x)$在$(0,1)$上收敛而不一致收敛.

【2758】 $f_n(x)=e^{-(x-n)^2}$；(1) $-l<x<l$，其中l为任意的正数；(2) $-\infty<x<+\infty$.

解 (1) 当$-l<x<l$时，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x)$，并有(当$n>[l]$时)

$$|f_n(x)-f(x)|=e^{-(x-n)^2}\leqslant e^{-(n-l)^2}.$$

任给$\varepsilon>0$(可设$\varepsilon<1$)，要使$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，只要$n>[l]$且$e^{-(n-l)^2}<\varepsilon$，即只要$n>l+\ln\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. 取$N=[l+\ln\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}]$，则当$n>N$时，对于$(-l,l)$上的一切$x$值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$在$(-l,l)$上一致收敛.

(2) 当$-\infty<x<+\infty$时，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x)$. 取$\varepsilon_0$使$0<\varepsilon_0<1$，不论$n$多么大，只要取$x=n$，就有

$$|f_n(n)-f(n)|=1>\varepsilon_0.$$

因此，$f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$上收敛而不一致收敛.

【2759】 $f_n(x)=\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}$；$0<x<1$.

解 当$0<x<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{n}=0$. 又$\lim\limits_{t\to+0}t\ln t=0$，故

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x).\quad |f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}\right|.$$

任给$\varepsilon>0$. 由于$\lim\limits_{t\to+0}t\ln t=0$，故存在$\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使当$0<t<\delta$时，恒有$|t\ln t|<\varepsilon$. 取$N=[\frac{1}{\delta}]$，则当$n>N$时，$\frac{1}{n}<\delta$，从而对一切$0<x<1$，都有$0<\frac{x}{n}<\delta$，故

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}\right|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$在$(0,1)$上一致收敛.

【2760】 $f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$；(1)在有限的区间$(a,b)$上；(2) 在区间$(-\infty,+\infty)$上.

解 (1) 当$a<x<b$时，

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x=\mathrm{e}^x=f(x).$$

记$c=\max\{|a|,|b|\}$. 由泰勒公式知

$$\ln f_n(x)=n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)=n\left[\frac{x}{n}-\frac{x^2}{2n^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{\theta x}{n}\right)^3}\cdot\frac{x^3}{n^3}\right],$$

其中$0<\theta<1$，$\left|\frac{\theta x}{n}\right|\leqslant\frac{c}{n}$，$|x^3|\leqslant c^3$，故

$$\ln f_n(x)=x-\frac{x^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

于是，易知

$$f_n(x)=\mathrm{e}^{x-\frac{x^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}=e^x\left[1-\frac{x^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right].$$

取适当大的N_1，则当$n>N_1$时，就有

$$|f_n(x)-f(x)|=\mathrm{e}^x\left|-\frac{x^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|\leqslant\frac{c^2\mathrm{e}^c}{n}\quad(a<x<b).$$

任给$\varepsilon>0$，要使$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，只要$n>N_1$，且$n>\frac{c^2\mathrm{e}^c}{\varepsilon}$. 取$N=\max\left(N_1,\left[\frac{c^2\mathrm{e}^c}{\varepsilon}\right]\right)$，则当$n>N$时，对于$(a,b)$上的一切$x$值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$在(a,b)上一致收敛.

(2) $|f_n(x)-f(x)|=\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-\mathrm{e}^x\right|$. 不论$n$多么大，只要取$x=n$，就有

$$|f_n(n)-f(n)|=2^n\left[\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right)^n-1\right],$$

它趋于$+\infty$，不可能小于任给的$\varepsilon>0$. 因此，$f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$上收敛而不一致收敛.

【2761】 $f_n(x)=n(x^{\frac{1}{n}}-1)$；$1\leqslant x\leqslant a$.

解 当$1\leqslant x\leqslant a$时，

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\ln x=f(x),$$

并有

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f(x)|&=|n(x^{\frac{1}{n}}-1)-n\ln[1+(x^{\frac{1}{n}}-1)]|\\&=\left|n(x^{\frac{1}{n}}-1)-n(x^{\frac{1}{n}}-1)+\frac{n}{2}(x^{\frac{1}{n}}-1)^2+nO((x^{\frac{1}{n}}-1)^3)\right|\\&=\frac{1}{2n}\left(\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right)^2+O\left(\frac{1}{n^2}\right)<\frac{(\ln a)^2}{n}+A\cdot\frac{1}{n^2},\end{aligned}$$

其中$A>0$为常数，上述不等式可在适当大的N_1取定后当$n>N_1$时成立. 显然对任给的$\varepsilon>0$，存在N_2，使当$n>N_2$时，$\frac{(\ln a)^2}{n}+A\cdot\frac{1}{n^2}<\varepsilon$，于是，取$N=\max(N_1,N_2)$，则当$n>N$时，对于$[1,a]$上的一切$x$值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$在$[1,a]$上一致收敛.

【2762】 $f_n(x)=\sqrt[n]{1+x^n}$；$0\leqslant x\leqslant 2$.

解 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

(1) 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$|f_n(x)-f(x)|=|\sqrt[n]{1+x^n}-1|$$
$$=\frac{x^n}{(1+x^n)^{\frac{n-1}{n}}+(1+x^n)^{\frac{n-2}{n}}+\cdots+(1+x^n)^{\frac{1}{n}}+1}<\frac{1}{n};$$

(2) 当 $1<x\leqslant 2$ 时，

$$|f_n(x)-f(x)|=|\sqrt[n]{1+x^n}-x|$$
$$=\frac{1}{(1+x^n)^{\frac{n-1}{n}}+x(1+x^n)^{\frac{n-2}{n}}+\cdots+x^{n-2}(1+x^n)^{\frac{1}{n}}+x^{n-1}}<\frac{1}{nx^{n-1}}<\frac{1}{n}.$$

因此，对于 $0\leqslant x\leqslant 2$ 的一切 x 值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{n}.$$

任给 $\varepsilon>0$，要使$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$. 取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$，则当 $n>N$ 时，对于$[0,2]$上的一切 x 值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$在$[0,2]$上一致收敛.

【2763】

$$f_n(x)=\begin{cases}n^2x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{n},\\ n^2(\frac{2}{n}-x), & \frac{1}{n}<x<\frac{2}{n},\\ 0, & x\geqslant\frac{2}{n};\end{cases}$$

在闭区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上.

解 当 $x=0$ 时，$f_n(x)=0$，因而$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(0)=0$.

当 $x\neq 0$ 时，在$[0,1]$上，$x>0$. 对于任给的 $\varepsilon>0$，取适当大的正整数 $N>\frac{1}{\varepsilon}$，使$\frac{2}{N}\leqslant x$，则当 $n>N$ 时，有 $\frac{2}{n}<\frac{2}{N}\leqslant x$. 于是，$f_n(x)=0$. 因此，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x).$$

取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<1$，不论 n 多么大，只要取 $x=\frac{1}{n^2}$，就有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n^2}\right)-f\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|=n^2\cdot\frac{1}{n^2}=1>\varepsilon_0.$$

因此，$f_n(x)$在$[0,1]$上收敛而不一致收敛.

【2764】 设 $f(x)$为定义于闭区间$[a,b]$上的任意函数，且

$$f_n(x)=\frac{[nf(x)]}{n}\quad(n=1,2,\cdots).$$

证明：当 $n\to\infty$时，$f_n(x)\rightrightarrows f(x)\quad(a\leqslant x\leqslant b)$.

证 由于

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{n}|[nf(x)]-nf(x)|\leqslant\frac{1}{n},$$

故对任给的 $\varepsilon>0$，若取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$，则当 $n>N$ 时，对于一切$x\in[a,b]$，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于 $f(x)$.

【2765】 设函数 $f(x)$在区间(a,b)内有连续的导数$f'(x)$，且

$$f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right].$$

证明：在闭区间 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 上(其中 $a<\alpha<\beta<b$)，$f_n(x)\rightrightarrows f'(x)$.

证 考虑$[\alpha',\beta']$，其中 $a<\alpha'<\alpha<\beta<\beta'<b$. 由于 $f_n(x)$(n 充分大)在$[\alpha',\beta']$上有连续导数，由微分学中值公式，得

$$f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=nf'\left(x+\frac{\theta}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=f'\left(x+\frac{\theta}{n}\right)\quad(0<\theta<1).$$

又因 $f'(x)$在$[\alpha',\beta']$上连续，所以 $f'(x)$在$[\alpha',\beta']$上一致连续，即对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使对于$[\alpha',\beta']$上的任意点 x'及 x''，只要当$|x'-x''|<\delta$时，就有$|f'(x')-f'(x'')|<\varepsilon$. 今取 $N=[\frac{1}{\delta}]+1=N(\varepsilon)$，则当 $n>N$ 时，有$\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\delta$. 于是，对$[\alpha,\beta]$上的一切 x 值，只要 N 足够大，就可保证 x 与$x+\frac{\theta}{n}$均属于$[\alpha',\beta']$. 于是，对于$[\alpha,\beta]$上的一切 x 值，均有

$$|f_n(x)-f'(x)|=\left|f'\left(x+\frac{\theta}{n}\right)-f'(x)\right|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛于 $f'(x)$.

【2766】 设 $f_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{i}{n}\right)$，其中 $f(x)$为$(-\infty,+\infty)$上的连续函数. 证明：序列 $f_n(x)$在任何有限闭区间$[a,b]$上一致收敛.

证 记 $f_n(x)$的极限函数为 $F(x)$，则

$$F(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\int_x^{x+1}f(t)\mathrm{d}t=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x+\frac{i}{n}}^{x+\frac{i+1}{n}}f(t)\mathrm{d}t=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{i}{n}+\frac{\theta_i}{n}\right)$$

$$(0<\theta_i<1;\ i=0,1,\cdots,n-1).$$

由于 $f(x)$在$[a,b+1]$上连续，故它在$[a,b+1]$上一致连续，即对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使对于$[a,b+1]$上的任意点 x'及 x''，只要当$|x'-x''|<\delta$时，就有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. 今取 $N=[\frac{1}{\delta}]+1$，则当$n>N$，$a\leqslant x\leqslant b$ 时，有

$$\left|\left(x+\frac{i}{n}+\frac{\theta_i}{n}\right)-\left(x+\frac{i}{n}\right)\right|<\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\delta$$

且

$$x+\frac{i}{n}\in[a,b+1],\ x+\frac{i}{n}+\frac{\theta_i}{n}\in[a,b+1]\quad(i=0,1,\cdots,n-1).$$

于是，

$$|F(x)-f_n(x)|\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\left|f\left(x+\frac{i}{n}+\frac{\theta_i}{n}\right)-f\left(x+\frac{i}{n}\right)\right|<\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\varepsilon=\frac{1}{n}\cdot n\varepsilon=\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于 $f(x)$.

研究下列级数的收敛性：

【2767】 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$；(1)在区间$|x|<q$ 内，此处 $q<1$，(2)在区间$|x|<1$ 内.

解 (1) 由于$|x^n|<q^n$ 及 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n$ 收敛($0<q<1$)，故由魏尔斯特拉斯判别法知，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ 在$|x|<q<1$内绝对并一致收敛.

(2) $S_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. 当$|x|<1$ 时，有

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\frac{1}{1-x}.$$

取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$，不论 n 多么大，只要取 $x=\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}$，就有

$$\left|S_n\left(\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}\right)-S\left(\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}\right)\right|=\left|\frac{\frac{1}{2}}{1-(\sqrt[n+1]{2})^{-1}}\right|>\frac{1}{2}>\varepsilon_0.$$

因此，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}$ 在 $|x|<1$ 内收敛而不一致收敛.

【2768】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$；在闭区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上.

提示 注意 $\left|\frac{x^n}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$，并利用魏尔斯特拉斯判别法.

解 由于当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时 $\left|\frac{x^n}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故由魏尔斯特拉斯判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ 在 $[-1,1]$ 上绝对并一致收敛.

【2769】 $\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$；在闭区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上.

提示 注意 $S_n(x)=1-x^{n+1}$ 及 $S(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & x=1.\end{cases}$ 收敛而不一致收敛. 取 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$ 及 $x=\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}$（不论 n 多大）即可证不一致收敛.

解 $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(1-x)x^k=(1-x)\sum_{k=0}^{n}x^k=1-x^{n+1}$.

于是，

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & x=1.\end{cases}$$

取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$，不论 n 多么大，只要取 $x=\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}$，就有

$$\left|S_n\left(\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}\right)-S\left(\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}\right)\right|=\left|\frac{1}{2}-1\right|=\frac{1}{2}>\varepsilon_0.$$

因此，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$ 在 $[0,1]$ 上收敛而不一致收敛.

【2770】 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$； $-1\leqslant x\leqslant 1$.

解 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x^k}{k}-\frac{x^{k+1}}{k+1}\right)=x-\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，有

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=x,\quad |S_n(x)-S(x)|=\frac{|x|^{n+1}}{n+1}\leqslant\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}.$$

于是，对任给的 $\varepsilon>0$，若取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于 $[-1,1]$ 上的一切 x 值，均有

$$|S_n(x)-S(x)|<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$ 在 $[-1,1]$ 上一致收敛.

【2771】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$； $0<x<+\infty$.

解 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{[(k-1)x+1](kx+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(k-1)x+1}-\frac{1}{kx+1}\right]=1-\frac{1}{nx+1}$.

当 $0<x<+\infty$ 时，有 $S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=1$. 取 ε_0 使$0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$，不论 n 多么大，只要取 $x=\frac{1}{n}$，就有

$$\left|S_n\left(\frac{1}{n}\right)-S\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\frac{1}{2}>\varepsilon_0.$$

因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$在$(0,+\infty)$上收敛而不一致收敛.

【2772】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$; $0<x<+\infty$.

解 由于 $\left|\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}\right|<\frac{1}{n^2}$ $(x>0)$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故由魏尔斯特拉斯判别法知，原级数在$(0,+\infty)$上绝对并一致收敛.

【2773】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$; (1) $0\leqslant x\leqslant\varepsilon$，其中 $\varepsilon>0$; (2) $\varepsilon\leqslant x<+\infty$.

解 当 $x=0$ 时，显然级数收敛于零.

当 $x>0$ 时，令 $u_n(x)=\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{1+(n+1)x}\right]=0<1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$收敛$(x\geqslant0)$. 易见，此时

$$\begin{aligned}S_n(x)&=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{kx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+kx)}\\&=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(1+x)\cdots[1+(k-1)x]}-\frac{1}{(1+x)\cdots(1+kx)}\right]\\&=1-\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}\to1\quad(n\to\infty),\end{aligned}$$

因此有 $2S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\1, & x>0.\end{cases}$

(1) 当 $x>0$ 时，有

$$|S_n(x)-S(x)|=\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}.$$

取 $0<\varepsilon_0<1$. 对于任意大(但固定的)n，由于

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}=1,$$

故可取 $0<x_0<\varepsilon$，使 $\frac{1}{(1+x_0)(1+2x_0)\cdots(1+nx_0)}>\varepsilon_0$，即$|S_n(x_0)-S(x_0)|>\varepsilon_0$. 由此可知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant\varepsilon$ 上不一致收敛.

(2) 当 $x\geqslant\varepsilon$ 及 $n\geqslant3$ 时，由于

$$\begin{aligned}|u_n(x)|&=\left|\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}\right|<\frac{nx}{(1+x)^n}\\&=\frac{nx}{1+nx+\frac{1}{2!}n(n-1)x^2+\cdots+x^n}<\frac{nx}{\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)x^3}\\&=\frac{6}{(n-1)(n-2)x^2}<\frac{6}{(n-2)^2\varepsilon^2},\end{aligned}$$

且级数 $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{6}{(n-2)^2\varepsilon^2}$收敛，故由魏尔斯特拉斯判别法知，原级数在$[\varepsilon,+\infty)$上绝对并一致收敛.

【2774】 利用魏尔斯特拉斯判别法，证明下列函数项级数在所指区间内的一致收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$, $-\infty<x<+\infty$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n}$, $-2<x<+\infty$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$, $0\leqslant x<+\infty$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$, $|x|<+\infty$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})$, $\frac{1}{2}\leqslant|x|\leqslant 2$；

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$, $|x|<a$, a 为任意正数；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$, $|x|<+\infty$；

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$, $|x|<+\infty$；

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$, $|x|<+\infty$；

(10) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)$, $|x|<a$；

(11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2\mathrm{e}^{-nx}$, $0\leqslant x<+\infty$；

(12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2x}{x^2+n^3}$, $|x|<+\infty$.

提示 注意(2) $\left|\frac{(-1)^n}{x+2^n}\right|<\frac{1}{2^n-1}$ $(n\geqslant 2, x>-2)$， (3) $1+n^4x^2\geqslant 2n^2x$ $(x>0)$，

(4) $1+n^5x^2\geqslant 2n^{\frac{5}{2}}x$， (5) $\left|\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})\right|\leqslant\frac{n^2\cdot 2^{n+1}}{\sqrt{n!}}$，

(6) 当 $n=2m$ 或 $2m+1$ 时，$u_n(x)=\frac{x^n}{m!}$，考虑级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}u_{2m}(x)$ 与 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}u_{2m+1}(x)$，

解 (1) 由于 $\left|\frac{1}{x^2+n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

(2) 考虑 $n\geqslant 2$，有 $\left|\frac{(-1)^n}{x+2^n}\right|<\frac{1}{2^n-2}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}$ $(x>-2)$. 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n}$ 在 $(-2,+\infty)$ 上一致收敛.

(3) 当 $x=0$ 时，级数显然收敛于零. 当 $x>0$ 时，$1+n^4x^2\geqslant 2n^2x$，于是，$\left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right|\leqslant\frac{1}{2n^2}$. 又因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

(4) 当 $|x|<+\infty$ 时，$1+n^5x^2\geqslant 2n^{\frac{5}{2}}x$，于是，$\left|\frac{nx}{1+n^5x^2}\right|\leqslant\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$. 又因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

(5) 当 $\frac{1}{2}\leqslant|x|\leqslant 2$ 时，

$$\left|\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})\right|\leqslant\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(|x|^n+|x|^{-n})\leqslant\frac{n^2\cdot 2^{n+1}}{\sqrt{n!}}.$$

对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot 2^{n+1}}{\sqrt{n!}}$，应用达朗贝尔判别法，当 $n\to\infty$ 时，有

$$\frac{\frac{(n+1)^2\,2^{n+2}}{\sqrt{(n+1)!}}}{\frac{n^2\cdot 2^{n+1}}{\sqrt{n!}}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{2}{\sqrt{n+1}}\to 0<1,$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot 2^{n+1}}{\sqrt{n!}}$ 收敛. 因此，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})$ 当 $\frac{1}{2}\leqslant|x|\leqslant 2$ 时一致收敛.

(6) 当 $n=2m$ 或 $2m+1$ 时，$u_n(x)=\frac{x^n}{m!}$. 考虑级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}u_{2m}(x)$ 与 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}u_{2m+1}(x)$，当 $|x|<a$ 时，不论 $n=2m$ 还是 $n=2m+1$，均有 $\left|\frac{x^n}{m!}\right|<\frac{a^n}{m!}$. 应用达朗贝尔判别法，易证级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{a^{2m}}{m!}$ 及 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{a^{2m+1}}{m!}$ 均收敛. 因此，级

数 $\sum_{m=1}^{\infty} u_{2m}(x)$ 与 $\sum_{m=1}^{\infty} u_{2m+1}(x)$ 当 $|x|<a$ 时绝对并一致收敛. 从而，原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$ 当 $|x|<a$ 时一致收敛.

(7) 当 $|x|<+\infty$ 时，$\left|\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}\right| \leqslant \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$ 当 $|x|<+\infty$ 时一致收敛.

(8) 当 $|x|<+\infty$ 时，$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ 当 $|x|<+\infty$ 时一致收敛.

(9) 当 $|x|<+\infty$ 时，$\left|\frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}\right| \leqslant \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$ 当 $|x|<+\infty$ 时一致收敛.

(10) 当 n 充分大(即 $n \geqslant n_0$)时，对于 $|x|<a$，有

$$\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)=\frac{x}{n\ln^2 n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

但当 $|x|<a$ 时，$\left|\frac{x}{n\ln^2 n}\right| \leqslant \frac{a}{n\ln^2 n}$，而 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{a}{n\ln^2 n}$ 收敛*) 以及 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 也收敛，故级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)$ 当 $|x|<a$ 时一致收敛.

*) 利用 2619 题的结果.

(11) 当 $x>0$ 时，$e^{nx}>1+nx+\frac{n^2x^2}{2}>\frac{n^2x^2}{2}$，故 $e^{-nx}<\frac{2}{n^2x^2}$. 于是，$|x^2e^{-nx}|<\frac{2}{n^2}$，此式对 $x=0$ 也成立. 又因 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^2e^{-nx}$ 当 $0 \leqslant x<+\infty$ 时一致收敛.

(12) 由于 $x^2+n^3 \geqslant 2n^{\frac{3}{2}}|x|$，故 $\left|\frac{x}{x^2+n^3}\right| \leqslant \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$. 当 n 充分大($n \geqslant n_0$)时，对于 $|x|<+\infty$，有

$$\left|\arctan\frac{2x}{x^2+n^3}\right|=\left|\frac{2x}{x^2+n^3}+O\left(\left(\frac{2x}{x^2+n^3}\right)^2\right)\right| \leqslant \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}+O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

又因 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 及 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 均收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{x}{x^2+n^3}$ 当 $|x|<+\infty$ 时一致收敛.

研究下列函数项级数在指定区间上的一致收敛性：

【2775】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$；(1)在闭区间 $\varepsilon \leqslant x \leqslant 2\pi-\varepsilon$ 上，其中 $\varepsilon>0$；(2)在闭区间 $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ 上.

解 (1) 当 $\varepsilon \leqslant x \leqslant 2\pi-\varepsilon$ 时，

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}},$$

又 $\frac{1}{n}$ 趋于零并且不依赖于 x，故由狄利克雷判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$ 上一致收敛.

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[0,2\pi]$ 上条件收敛*). 但它不一致收敛，这可用反证法获证. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上一致收敛，其中 $u_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$. 则应有：任给 $\varepsilon>0$，例如，取 $\varepsilon=\frac{1}{4}$，必存在 $N_1=N_1(\varepsilon)$ (它与 x 无关)，使当 $n \geqslant N_1$，对于 $[0,2\pi]$ 上的一切 x 值，均有

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon,$$

其中 p 为任意正整数. 取 $N_2 \geqslant 2N_1$，记

$$n_0=\max\left(\left[\frac{N_2}{2}\right],\left[\frac{N_2+1}{2}\right]\right),$$

则 $n_0 \geqslant N_1$，又取 p 使 $n_0+p=N_2+1$，则应有

$$|u_{n_0+1}(x)+u_{n_0+2}(x)+\cdots+u_{n_0+p}(x)|<\varepsilon,$$

也即有

$$\left|\sum_{\frac{N_2}{2}+1\leqslant n<N_2+2} u_n(x)\right|<\varepsilon=\frac{1}{4}\quad (x\in[0,2\pi]).\tag{1'}$$

今取 $x_0=\frac{1}{N_2+2}\cdot\frac{\pi}{2}$，当然上式(1′)也应成立. 但是另一方面，由于当 $\frac{N_2}{2}+1\leqslant n<N_2+2$ 时，显然有 $0<nx_0<\frac{\pi}{2}$，故有 $\sin nx_0\geqslant nx_0\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{n}{N_2+2}$. 于是，$u_n(x_0)=\frac{\sin nx_0}{n}\geqslant\frac{1}{N_2+2}$，从而有

$$\sum_{\frac{N_2}{2}+1\leqslant n<N_2+2} u_n(x_0)\geqslant\frac{1}{N_2+2}\sum_{\frac{N_2}{2}+1\leqslant n<N_2+2} 1\geqslant\frac{1}{N_2+2}\cdot\frac{1}{2}(N_2+2)=\frac{1}{2},$$

它与(1′)中当 $x=x_0$ 时相矛盾. 这就证明了级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在 $[0,2\pi]$ 上条件收敛而不一致收敛的结论.

*) 利用 2698 题的结果.

【2776】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n x}$；$0<x<+\infty$.

解 记 $u_n(x)=2^n\sin\frac{1}{3^n x}$ $(n=1,2,\cdots)$，当 $0<x<+\infty$ 时，由于

$$|u_n(x)|\leqslant 2^n\cdot\frac{1}{3^n x}=\frac{1}{x}\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛，故原级数绝对收敛，从而收敛. 但它在 $(0,+\infty)$ 内并不一致收敛. 如若不然，即设它一致收敛，则对任给 $\varepsilon>0$，例如，取 $\varepsilon=1$，必存在 $N=N(\varepsilon)$（它与 x 无关），使当 $n\geqslant N$ 时，对于 $(0,+\infty)$ 内的一切 x 值，均有

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon,$$

其中 p 为任意正整数. 今取 $p=1,n=N$，则对于一切 $x\in(0,+\infty)$，应有

$$|u_{N+1}(x)|<\varepsilon=1.$$

又取 $x_0=\frac{2}{3^{N+1}\pi}\in(0,+\infty)$，则也应有 $|u_{N+1}(x_0)|<1$. 但事实上却有

$$u_{N+1}(x_0)=2^{N+1}\sin\frac{1}{3^{N+1}x_0}=2^{N+1}\sin\frac{\pi}{2}=2^{N+1}>1,$$

这与 $|u_{N+1}(x_0)|<1$ 矛盾. 证毕.

【2777】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$；$0<x<+\infty$.

提示 利用狄利克雷判别法.

解 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\right|\leqslant 1$. 当 $0<x<+\infty$ 时，$\frac{1}{n+x}<\frac{1}{n}$，它单调一致地趋于零. 因此，由狄利克雷判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$ 当 $0<x<+\infty$ 时一致收敛.

【2778】 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x}$；$0\leqslant x\leqslant 2\pi$.

提示 利用狄利克雷判别法.

解 当 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 时，显然 $\frac{1}{n+\sin x}$ 对于 n 单调递减，同时由于 $0<\frac{1}{n+\sin x}<\frac{1}{n-1}$，故当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n+\sin x}$ 在 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 上一致地趋于零. 又由于 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\right|\leqslant 1$，故级数在 $[0,2\pi]$ 上一致收敛.

【2779】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}$；$|x|\leqslant 10$.

解 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}\right|\leqslant 2$，记 $b_n(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}$，由于

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}>\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2+e^x}},$$

故 $b_n(x)$ 单调下降. 又由于

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}<\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\to 0\quad(|x|\leqslant 10),$$

故 $b_n(x)$ 单调一致地趋于零. 因此,由狄利克雷判别法知,级数在 $[-10,10]$ 上一致收敛.

【2780】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}$; $-\infty<x<+\infty$.

解 $\left|\sum\limits_{k=1}^{\infty}\cos\dfrac{2n\pi}{3}\right|\leqslant\dfrac{1}{\left|\sin\frac{\pi}{3}\right|}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. 又 $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}$ 对于每一个 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都是单调递减的,且由于 $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}\leqslant\dfrac{1}{n}$,故对每一个 x 一致地趋于零. 因此,由狄利克雷判别法知,级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

【2781】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n+x}}$; $0\leqslant x<+\infty$.

解 当 $x=2m\pi$ $(m=0,1,2,\cdots)$ 时, $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin x\sin kx=0$. 当 $x\neq 2m\pi$ $(m=0,1,2,\cdots)$ 时,

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin x\sin kx\right|=|\sin x|\cdot\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\leqslant|\sin x|\cdot\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}=2\left|\cos\frac{x}{2}\right|\leqslant 2.$$

于是,对于一切 $x\in[0,+\infty)$,均有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin x\sin kx\right|\leqslant 2.$$

又 $\dfrac{1}{\sqrt{n+x}}$ 对于每一个 $x\in[0,+\infty)$ 关于 n 都是单调递减的,且由 $\dfrac{1}{\sqrt{n+x}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 知,当 $n\to\infty$ 时, $\dfrac{1}{\sqrt{n+x}}$ 关于 x 在 $0\leqslant x<+\infty$ 上一致地趋于零. 因此,由狄利克雷判别法知,级数在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

【2782】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}$; $0\leqslant x<+\infty$.

提示 注意 $\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}=\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}}$,并利用 2672 题的结果及阿贝尔判别法.

解 $\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}=\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}}$. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛*),且与 x 无关,故它对 x 而言是一致收敛的.

另一方面, $\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}}$ 对于每一个 $x\in[0,+\infty)$ 都是单调递减的且有界: $\left|\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}}\right|\leqslant 1$.

因此,由阿贝尔判别法知,原级数在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

*) 利用 2672 题的结果.

【2783】 不连续函数序列可否一致收敛于连续函数?

解题思路 可以. 例如,函数序列 $f_n(x)=\dfrac{1}{n}\varphi(x)$,其中

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 为无理数},\\ 1, & x\text{ 为有理数}.\end{cases}$$

利用 734 题的结果,可知 $f_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上每一点均不连续,但它在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于连续

函数 $f(x)=0$.

解 可以. 例如,函数序列

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\varphi(x)\ (n=1,2,\cdots),\quad 其中\quad \varphi(x)=\begin{cases}0, & x\ 为无理数,\\ 1, & x\ 为有理数.\end{cases}$$

显然,$f_n(x)$在$-\infty<x<+\infty$上每一点均不连续,但由于

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{1}{n}\quad(n=1,2,\cdots;\ -\infty<x<+\infty),$$

故当$n\to\infty$时,$f_n(x)$在$-\infty<x<+\infty$上一致趋于零. 而$f(x)\equiv 0\ (-\infty<x<+\infty)$显然是连续函数. 此例说明,不连续函数的序列仍然可以一致收敛于连续函数.

【2784】 证明:若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$在$[a,b]$上一致收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$在$[a,b]$上也一致收敛.

提示 由柯西准则并注意不等式

$$|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots+f_{n+p}(x)|\leqslant|f_{n+1}(x)|+|f_{n+2}(x)|+\cdots+|f_{n+p}(x)|,$$

命题即可获证.

证 由柯西准则及题设知:对于任给的$\varepsilon>0$,存在$N=N(\varepsilon)$,使当$n>N$时,对于$[a,b]$上的一切x值,均有

$$|f_{n+1}(x)|+|f_{n+2}(x)|+\cdots+|f_{n+p}(x)|<\varepsilon,$$

其中p为任意正整数. 由于

$$|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots+f_{n+p}(x)|\leqslant|f_{n+1}(x)|+|f_{n+2}(x)|+\cdots+|f_{n+p}(x)|<\varepsilon,$$

故根据一致收敛的柯西准则知,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛.

【2785】 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在$[a,b]$上绝对并一致收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$在$[a,b]$上是否必定一致收敛?

解 未必. 例如,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ 在$[0,1]$上绝对并一致收敛,但其绝对值级数不一致收敛. 事实上,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n(1-x)x^n|=\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$$

在$[0,1]$上收敛而不一致收敛*). 因此,我们只要证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ 在$[0,1]$上一致收敛就可以了. 首先,当$x=0$及$x=1$时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ 显然收敛. 当$0<x<1$时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ $=(1-x)\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^nx^n$ 是交错级数且满足莱布尼茨条件,故也收敛. 要证其一致收敛,只要证其余式$R_n(x)$ $=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k(1-x)x^k$ 一致趋于零(对$0\leqslant x\leqslant 1$)即可. 按满足莱布尼茨条件的交错级数的余式估计,有

$$|R_n(x)|\leqslant(1-x)x^{n+1}\quad(0\leqslant x\leqslant 1).\tag{1}$$

令$f(x)=(1-x)x^{n+1}$,通过求导数易知此函数在$x=\frac{n+1}{n+2}$时达到其在$0\leqslant x\leqslant 1$上的最大值,故当$0\leqslant x\leqslant 1$时,恒有

$$0\leqslant f(x)\leqslant f\left(\frac{n+1}{n+2}\right)=\frac{1}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}<\frac{1}{n+2}.$$

于是,由(1)式知

$$|R_n(x)|<\frac{1}{n+2}\quad(0\leqslant x\leqslant 1;\ n=1,2,\cdots).$$

由此即知，当 $n\to\infty$ 时 $R_n(x)$ 关于 $0\leqslant x\leqslant 1$ 一致趋于零.

*) 利用 2769 题的结果.

【2786】 证明：绝对收敛且一致收敛的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (0\leqslant x\leqslant 1),$$

其中

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 2^{-(n+1)},\\ \dfrac{1}{n}\sin^2(2^{n+1}\pi x), & 2^{-(n+1)}<x<2^{-n},\\ 0, & 2^{-n}\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

不能用非负项的收敛数项级数作为其强级数.

证 首先指出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上是一致收敛的. 事实上，当 $n\geqslant N$ 时，柯西余项函数为

$$R_{N,p}(x)=f_{N+1}(x)+f_{N+2}(x)+\cdots+f_{N+p}(x).$$

于是，当 $x\in[0,1]$ 时，有

$$R_{N,p}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{N+1}\sin^2(2^{N+2}\pi x), & x\in(2^{-(N+2)},2^{-(N+1)}),\\ \dfrac{1}{N+2}\sin^2(2^{N+3}\pi x), & x\in(2^{-(N+3)},2^{-(N+2)}),\\ & \vdots\\ \dfrac{1}{N+1}\sin^2(2^{N+p+1}\pi x), & x\in(2^{-(N+p+1)},2^{-(N+p)}),\\ 0, & \text{其他点 } x,\end{cases}$$

因此，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，恒有

$$|R_{N,p}(x)|<\frac{1}{N}.$$

由此即知：对于任给的 $\varepsilon>0$，只要取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于 $[0,1]$ 上的一切 x 值，均有 $|R_{N,p}(x)|<\varepsilon$，其中 p 为任意正整数. 由柯西准则知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上绝对收敛且一致收敛. 下面证明：不可能用某非负项收敛数项级数作为其强级数. 采用反证法，假设有某收敛的强级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，其中 $a_n\geqslant 0$ 是常数，即在 $[0,1]$ 上有

$$|f_n(x)|\leqslant a_n \quad (n=1,2,\cdots), \tag{1}$$

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，以下将说明由此引出矛盾. 事实上，据(1)式对一切 $x\in[0,1]$ 均成立. 今取 $x_n=\dfrac{3}{2}2^{-(n+1)}$，显然有 $2^{-(n+1)}<x_n<2^{-n}$. 因此得

$$a_n\geqslant|f_n(x_n)|=\frac{1}{n}\sin^2(2^{n+1}\pi x_n)=\frac{1}{n}>0.$$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛得知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 也应收敛，这与众所周知的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 的发散结论相抵触. 证毕.

【2787】 证明：若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$ 的各项是闭区间 $[a,b]$ 上的单调函数，此级数在闭区间 $[a,b]$ 的两个端点绝对收敛，则此级数在闭区间 $[a,b]$ 上绝对并一致收敛.

证明思路 由题设，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\varphi_n(a)|$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\varphi_n(b)|$ 均收敛. 令 $a_n=\max\{|\varphi_n(a)|,|\varphi_n(b)|\}$，则可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 又由

$$|\varphi_n(x)|\leqslant a_n \quad (a\leqslant x\leqslant b;\ n=1,2,\cdots),$$

利用魏尔斯特拉斯判别法，命题即获证.

证 按题设，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\varphi_n(a)|$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\varphi_n(b)|$ 均收敛. 令 $a_n=\max(|\varphi_n(a)|,|\varphi_n(b)|)$，由于 $0\leqslant a_n\leqslant|\varphi_n(a)|+|\varphi_n(b)|$，故知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 由于 $\varphi_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上是单调的，故

$$|\varphi_n(x)|\leqslant a_n \quad (a\leqslant x\leqslant b;\ n=1,2,\cdots).$$

由魏尔斯特拉斯判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对并一致收敛.

【2788】 证明：幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在全部位于其收敛区间内的任何闭区间上一致收敛.

证明思路 设幂级数的收敛区间为 $(-R,R)$ $(R>0)$，$[a,b]\subset(-R,R)$. 令 $r=\max(|a|,|b|)$，则 $|a_nx^n|\leqslant|a_nr^n|$. 并利用魏尔斯特拉斯判别法.

证 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛区间为 $(-R,R)$ $(R>0)$，$[a,b]\subset(-R,R)$. 令

$$r=\max(|a|,|b|),$$

则当 $x\in[a,b]$ 时，有

$$|a_n x^n|\leqslant|a_n|\cdot|r|^n=|a_nr^n|.$$

由题设知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nr^n|$ 收敛，故原幂级数在 $[a,b]$ 上绝对并一致收敛，由 $[a,b]$ 的任意性，本题获证.

【2789】 设 $a_n\to\infty$ 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_n}\right|$ 收敛. 证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x-a_n}$ 在不包含点 $a_n(n=1,2,\cdots)$ 的任何有界闭集合上绝对并一致收敛.

证明思路 设 E 为任一不包含点 $a_n(n=1,2,\cdots)$ 的有界闭集，则存在常数 $M>0$，当 $x\in E$ 时，有 $|x|\leqslant M$ 及 $\left|\frac{x}{a_n}\right|\neq1$ $(n=1,2,\cdots)$. 由题设知，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{|a_n|}=0$，故存在正整数 N，使当 $n>N$ 且 $x\in E$ 时，有 $\left|\frac{x}{a_n}\right|<\frac{1}{2}$. 于是，当 $n>N$ 时，可证

$$\left|\frac{1}{x-a_n}\right|\leqslant\frac{2}{|a_n|},$$

由题设，并利用魏尔斯特拉斯判别法，命题即可获证.

证 设 E 是任一不包含点 $a_n(n=1,2,\cdots)$ 的有界闭集，则存在常数 $M>0$，当 $x\in E$ 时有

$$|x|\leqslant M \quad 且 \quad \left|\frac{x}{a_n}\right|\neq1 \quad (n=1,2,\cdots).$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_n}\right|$ 收敛，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{|a_n|}=0$. 因此，存在 N，使当 $n>N$，$x\in E$ 时，

$$\left|\frac{x}{a_n}\right|<\frac{1}{2}.$$

于是，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{1}{x-a_n}\right|=\frac{1}{|a_n|}\cdot\frac{1}{\left|1-\frac{x}{a_n}\right|}\leqslant\frac{1}{|a_n|}\cdot\frac{1}{1-\left|\frac{x}{a_n}\right|}\leqslant\frac{1}{|a_n|}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{|a_n|}.$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{|a_n|}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{x-a_n}\right|$ 在 E 上绝对并一致收敛.

【2790】 证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则狄利克雷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 当 $x\geqslant0$ 时一致收敛.

提示 利用阿贝尔判别法.

证 $0<\frac{1}{n^x}\leqslant1$，且 $\frac{1}{n^x}$ 对每一个 $x\geqslant0$ 是单调的. 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 当 $x\geqslant0$ 时一致收敛，故由阿贝尔判别法知，级

数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 当 $x\geqslant 0$ 时一致收敛.

【2791】 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 证明:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\mathrm{e}^{-nx}$ 在区域 $x\geqslant 0$ 内一致收敛.

提示 利用阿贝尔判别法.

证 $0<\mathrm{e}^{-nx}\leqslant 1$, 且 e^{-nx} 对每一个 $x\geqslant 0$ 是单调的. 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 当 $x\geqslant 0$ 时一致收敛,故由阿贝尔判别法知,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\mathrm{e}^{-nx}$ 当 $x\geqslant 0$ 时一致收敛.

【2792】 证明:函数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ 在区域 $-\infty<x<+\infty$ 内连续并有连续的导数.

证明思路 首先,证明函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续. 只需注意 $\left|\frac{\sin nx}{n^3}\right|\leqslant\frac{1}{n^3}$ 及 $\frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续性,利用函数项级数一致收敛的性质 1),即知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

其次,再证导数 $f'(x)$ 连续. 注意 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin nx}{n^3}\right)=\frac{\cos nx}{n^2}$, 仿前半段的证明,即知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ 的和在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,且由性质 3)有

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin nx}{n^3}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}.$$

证 首先证明 $f(x)$ 连续. 事实上,由 $\left|\frac{\sin nx}{n^3}\right|\leqslant\frac{1}{n^3}$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 的收敛性即知,原级数当 $-\infty<x<+\infty$ 时一致收敛. 又由于 $\frac{\sin nx}{n^3}$ 在域 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ 的和 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

其次再证明 $f'(x)$ 连续. 由于 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin nx}{n^3}\right)=\frac{\cos nx}{n^2}$ 连续,且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ 当 $-\infty<x<+\infty$ 时一致收敛,故再次根据函数项级数一致收敛的性质,即知上述级数的和在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,且有

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}.$$

【2793】 证明:函数

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(n-x)^2}$$

(1)在除整数点 $x=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 外的一切点有定义并且连续; (2)为周期函数,其周期等于 1.

证 考虑级数(1′) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n-x)^2}$ 及 (2′) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-n-x)^2}$. 显然,当 $x\neq k$ $(k=0,1,2,\cdots)$ 时,级数(1′)收敛;当 $x\neq -l$ $(l=1,2,\cdots)$ 时,级数(2′)收敛. 因此,当 $x\neq 0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时,级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(n-x)^2}$ 收敛.

(1) 因而在除 $x=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 外的一切点上 $f(x)$ 有定义. 下面为了证明 $f(x)$ 在任一点 $x=x_0$ $(x_0\neq k,$ $k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处 $f(x)$ 连续,我们可以在 $([x_0],[x_0]+1)$ 内考虑一个包含 x_0 的区间 $[a,b]$:

$$[x_0]<a<x_0<b<[x_0]+1.$$

记 $p=\max(|a|,|b|)$. 在 $[a,b]$ 上考虑级数(1′)及(2′). 当 n 适当大时(例如 $n\geqslant n_0$),由于

$$\left|\frac{1}{(n-x)^2}\right|\leqslant\frac{1}{(n-|x|)^2}\leqslant\frac{1}{(n-p)^2},\quad\left|\frac{1}{(-n-x)^2}\right|\leqslant\frac{1}{(n-|x|)^2}\leqslant\frac{1}{(n-p)^2},$$

且 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n-p)^2}$ 收敛,故级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{(n-x)^2}$ 及 $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}\frac{1}{(-n-x)^2}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. 从而,级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n-x)^2}$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-n-x)^2}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛,也即 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(n-x)^2}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. 于是,其和函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,因而 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

(2) 当 $x\neq 0,\pm 1,\pm 2,\cdots$ 时，有

$$f(x+1)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{[n-(x+1)]^2}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{[(n-1)-x]^2},$$

作指标交换 $m=n-1$，则当 $n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$ 时有 $m=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$. 因而得

$$f(x+1)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(m-x)^2}=f(x),$$

上式表明，当 $x\neq 0,\pm 1,\pm 2,\cdots$ 时，$f(x)$ 是一个以 1 为周期的周期函数. 证毕.

【2794】 证明：级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[nxe^{-nx}-(n-1)xe^{-(n-1)x}\right]$$

在闭区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上收敛但不一致收敛，而它的和是此区间上的连续函数.

证 考虑部分和

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\left[kxe^{-kx}-(k-1)xe^{-(k-1)x}\right]=nxe^{-nx},$$

显然，在 $[0,1]$ 上其极限函数 $S(x)$ 存在(即级数的和)且连续：

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=0.$$

但此级数在 $[0,1]$ 上不一致收敛. 用反证法. 若不然，即若一致收敛，则对任给的 $\varepsilon>0$，存在数 $N=N(\varepsilon)$，使当 $n\geqslant N$ 时，对于 $[0,1]$ 上的一切 x 值，均有 $|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$. 今取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}e^{-1}$，应有

$$|S_n(x)-S(x)|<\frac{1}{2}e^{-1}.$$

取 $x=x_0=\frac{1}{n}$，则也应有 $|S_n(x)-S(x)|<\frac{1}{2}e^{-1}$. 但另一方面，却有

$$|S_n(x_0)-S(x_0)|=S_n(x_0)=e^{-1}>\varepsilon_0,$$

矛盾，证毕.

【2795】 确定函数 $f(x)$ 的存在域并研究它们的连续性，设

(1) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$； (2) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x+(-1)^n n}{x^2+n^2}$； (3) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x^2)^n}$.

解 (1) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(x+\frac{1}{n}\right)^n\right|}=|x|$，故当 $|x|<1$ 时，级数绝对收敛；而当 $|x|>1$ 时，级数发散. 当 $|x|=1$ 时，通项不趋于零，因而级数也发散. 于是，$f(x)$ 的存在域为 $(-1,1)$. 下面证明 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内连续. 设 $0<\delta<1$，则当 $|x|\leqslant 1-\delta$ 时，有

$$\left|\left(x+\frac{1}{n}\right)^n\right|\leqslant\left(1-\delta+\frac{1}{n}\right)^n.$$

上面已证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\delta+\frac{1}{n}\right)^n$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$ 在 $[-1+\delta,1-\delta]$ 上一致收敛，从而，$f(x)$ 在该区间上连续. 由于 δ 可以任意的小，故知 $f(x)$ 在开区间 $(-1,1)$ 内连续.

(2) $\frac{x+n(-1)^n}{x^2+n^2}=\frac{x}{x^2+n^2}+(-1)^n\frac{n}{x^2+n^2}$. 由狄利克雷判别法易知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{x^2+n^2}$ 在整个数轴上一致收敛，故其和函数在整个数轴上连续. 又对于任意的 $M>0$，当 $x\in[-M,M]$ 时，由于 $\left|\frac{x}{x^2+n^2}\right|\leqslant\frac{M}{n^2}$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{M}{n^2}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{x^2+n^2}$ 在 $[-M,M]$ 上一致收敛，从而，其和函数在 $[-M,M]$ 上连续. 由 M 的任意性知，上述和函数在整个数轴上连续.

于是，作为这两个级数的和 $f(x)$ 在整个数轴上有定义且是连续的.

(3) 由于当 $-\infty<x<+\infty$ 且 $x\neq 0$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|}{(1+x^2)^n}}=\frac{1}{1+x^2}<1,$$

故此时级数绝对收敛. 显然当 $x=0$ 时级数收敛于零. 于是, $f(x)$ 的存在域为 $(-\infty,+\infty)$.

注意在任一点 $x_0\neq 0$ 上, 例如, 当 $x_0>0$ 时, 我们可选 a,b 使 $0<a<x_0<b$. 考虑 $x\in[a,b]$, 显然有

$$\left|\frac{x}{(1+x^2)^n}\right|\leqslant\frac{b}{(1+a^2)^n}.$$

但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b}{(1+a^2)^n}$ 收敛, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x^2)^n}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. 注意每一个 $\frac{x}{(1+x^2)^n}$ 连续, 因而和函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 于是, $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续(对于 $x_0<0$ 的情况可同理证明), 因而易得

$$f(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}=\frac{x}{1+x^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}}=\frac{1}{x}\quad(x\neq 0).$$

由此可见 $f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \frac{1}{x}, & x\neq 0,\end{cases}$ 即和函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续, 而在 $x\neq 0$ 处连续.

【2796】 设 $r_k(k=1,2,\cdots)$ 是闭区间 $[0,1]$ 上的有理数. 证明函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-r_k|}{3^k}\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$$

具有下列性质: (1) 连续; (2) 在无理点可微而在有理点不可微.

证 (1) 由于当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时, $\left|\frac{x-r_k}{3^k}\right|\leqslant\frac{1}{3^k}$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}$ 收敛, 故原级数在 $[0,1]$ 上一致收敛, 又 $\frac{|x-r_k|}{3^k}$ 连续, 故和函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续.

(2) 先设 x_0 为 $[0,1]$ 中的无理点. 当 $x\neq x_0$ 时, 我们有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\sum_{k=1}^{\infty}v_k(x),\tag{1'}$$

其中 $v_k(x)=\frac{|x-r_k|-|x_0-r_k|}{3^k(x-x_0)}$ $(k=1,2,\cdots)$. 由于

$$\big||x-r_k|-|x_0-r_k|\big|\leqslant|(x-r_k)-(x_0-r_k)|=|x-x_0|,$$

故 $|v_k(x)|\leqslant\frac{1}{3^k}(x\neq x_0)$. 由此可知, 级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}v_k(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1, x\neq x_0$ 上一致收敛. 此外, 对于每个固定的 k, 由于 $x_0\neq r_k$, 故当 x 与 x_0 充分近时, $(x-r_k)$ 必与 (x_0-r_k) 同号, 由此易知

$$\lim_{x\to x_0}v_k(x)=\frac{1}{3^k}\operatorname{sgn}(x_0-r_k)\quad(k=1,2,\cdots).$$

从而, 当 $x\to x_0$ 时, 级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}v_k(x)$ 可逐项求极限, 再根据 (1') 式即得

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\sum_{k=1}^{\infty}v_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0}v_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}\operatorname{sgn}(x_0-r_k).$$

由此可知, $f(x)$ 在点 x_0 可微且 $f'(x_0)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}\operatorname{sgn}(x_0-r_k)$.

现设 x_0 是 $[0,1]$ 中的一个有理点, 于是, $x_0=r_m$, m 为某正整数. 这时, (1') 式为: 当 $x\neq x_0$ 时,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=v_m(x)+\sum_{k\neq m}v_k(x),\tag{2'}$$

其中

$$v_m(x)=\frac{|x-r_m|-|x_0-r_m|}{3^m(x-x_0)}=\frac{|x-x_0|}{3^m(x-x_0)}=\frac{1}{3^m}\operatorname{sgn}(x-x_0).$$

仿前段之证, 可知: 当 $x\to x_0$ 时, 级数 $\sum\limits_{k\neq m}^{\infty}v_k(x)$ 可逐项取极限, 得

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{k\neq m}v_k(x)=\sum_{k\neq m}\lim_{x\to x_0}v_k(x)=\sum_{k\neq m}\frac{1}{3^k}\operatorname{sgn}(x_0-r_k).$$

由于显然 $\lim\limits_{x\to x_0+0} v_m(x)=\frac{1}{3^m}$，$\lim\limits_{x\to x_0-0} v_m(x)=-\frac{1}{3^m}$，故极限 $\lim\limits_{x\to x_0} v_m(x)$ 不存在. 于是，根据(2′)式即知极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 不存在，故 $f(x)$ 在点 x_0 不可微. 证毕.

【2797】 证明：黎曼 ζ 函数 $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在区域 $x>1$ 内是连续的并且在此区域内有连续的各阶导数.

证 显然级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 当 $x>1$ 时收敛. 各项求导数所得级数为 $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$. 下证它在 $1<a\leqslant x<+\infty$ 上一致收敛(a 为大于一的任何数). 事实上，当 $a\leqslant x<+\infty$ 时，有

$$0<\frac{\ln n}{n^x}\leqslant\frac{\ln n}{n^a},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^a}$ 收敛(这是由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln n}{n^a}}{\frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{a-1}{2}}}=0$，而 $\frac{a+1}{2}>1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}$ 收敛)，故知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$ 在 $a\leqslant x<+\infty$ 上一致收敛. 再注意到每项 $\frac{\ln n}{n^x}$ 都是 x 的连续函数，即知：在 $a\leqslant x<+\infty$ 上可逐项求导数，得

$$\zeta'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x},\tag{1}$$

并且 $\zeta'(x)$ 在 $a\leqslant x<+\infty$ 上连续. 再由 $a>1$ 的任意性即知(1)式对一切 $1<x<+\infty$ 成立，并且 $\zeta'(x)$ 在 $1<x<+\infty$ 上连续. 当然 $\zeta(x)$ 更在 $1<x<+\infty$ 上连续.

利用数学归纳法，并注意到对任何正整数 k，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^k}{n^a}$ $(a>1)$ 都收敛，仿照上述，可证：对任何正整数 k，$\zeta^{(k)}(x)$ 在 $1<x<+\infty$ 上都存在且连续，并且可由原级数逐项求导数 k 次而得：

$$\zeta^{(k)}(x)=(-1)^k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^k}{n^x}\quad(1<x<+\infty).$$

【2798】 证明：θ 函数 $\theta(x)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\pi n^2 x}$ 当 $x>0$ 时有定义并无穷多次可微.

证 首先，我们证明 $\theta(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有定义且可微.

在级数 $\theta(x)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}u_n(x)$ 中，$u_n(x)=\mathrm{e}^{-\pi n^2 x}$ 显然有 $u_{-n}(x)=u_n(x)$，故只要考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\pi n^2 x}$ $(x>0)$ 即可. 对于每一个 $x>0$ 及充分大的 n，有

$$0<\mathrm{e}^{-n^2 x}<\frac{1}{n^2 x},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2 x}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\pi n^2 x}$ 收敛. 对此级数逐项求导后，得级数 $-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\pi n^2\mathrm{e}^{-\pi n^2 x}$，它在 $[\varepsilon,+\infty)$ 内是一致收敛的(ε 为任意正数). 事实上，当 n 充分大时，对一切 $\varepsilon\leqslant x<+\infty$，均有

$$0<\pi n^2\mathrm{e}^{-\pi n^2 x}\leqslant\pi n^2\mathrm{e}^{-\pi n^2\varepsilon}<\frac{1}{n^2\varepsilon},$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2\varepsilon}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\pi n^2\mathrm{e}^{-\pi n^2 x}$ 在 $\varepsilon\leqslant x<+\infty$ 上一致收敛. 再注意到各项都是连续函数，即知级数 $\theta(x)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\pi n^2 x}$ 在 $[\varepsilon,+\infty)$ 内连续可微，且可逐项求导数. 由 $\varepsilon>0$ 的任意性知，$\theta(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续可微且可逐项求导数.

其次，仿照前段可证明 $\theta'(x)$ 的可微性.

再次，利用数学归纳法，并注意到当 n 充分大时，对于一切 $x\in[\varepsilon,+\infty)$，均有

$$0<(\pi n^2)^k\mathrm{e}^{-\pi n^2 x}<\frac{1}{n^2\varepsilon},$$

仿照前段可证明$\theta(x)$在$(0,+\infty)$内可微分k次，其中k为任意正整数，从而，$\theta(x)$当$x>0$时无穷多次可微.

【2799】 确定函数$f(x)$的存在域并研究它们的可微性，设：

(1) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n+x}$； (2) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{n^2+x^2}$.

解 (1) 易知当$x\neq -k(k=1,2,\cdots)$时，级数是莱布尼茨型，因而收敛. 任取$x=x_0$，$x_0\neq -k(k=1,2,\cdots)$.

(i) 当$x_0\geqslant 0$，取$\beta\geqslant x_0$，则$x_0\in[-\frac{1}{2},\beta]$. 在区间$[-\frac{1}{2},\beta]$上，注意$u_n(x)=\frac{(-1)^n x}{n+x}$，有

$$u_n'(x)=\frac{(-1)^n n}{(n+x)^2}\quad(n=1,2,\cdots)$$

且连续. $\frac{n}{(n+x)^2}$随n单调下降且一致趋于零，事实上，当$x\in[-\frac{1}{2},\beta]$，$n>1$时，有

$$\left|\frac{n}{(n+x)^2}\right|\leqslant\frac{n}{(n-1)^2}\to 0\quad(n\to\infty);$$

显然$\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k$有界(小于或等于1). 因此，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$在$[0,\beta]$上一致收敛. 从而，

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n+x}$$

在$[0,\beta]$上可微，当然它在$x=x_0$点可微.

(ii) 当$x_0<0$时，必有k_0，使$-(k_0+1)<x_0<-k_0$. 今选取α,β使

$$-(k_0+1)<\alpha<x_0<\beta<-k_0.$$

在区间$[\alpha,\beta]$上，$u_n'(x)=\frac{(-1)^n n}{(n+x)^2}$连续且随$n$单调下降，并且一致趋于零(考虑充分大的$n$)：

$$\left|\frac{n}{(n+x)^2}\right|=\frac{n}{n^2+2nx+x^2}\leqslant\frac{n}{n^2-2n|x|}\leqslant\frac{n}{n^2-2n|\alpha|}=\frac{1}{n-2|\alpha|}\to 0\quad(n\to\infty).$$

又显然知$\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k$有界，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛. 因而，

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n+x}$$

在$[\alpha,\beta]$上可微，当然它在$x=x_0$点可微.

总之，函数$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n+x}$在$x\neq -k(k=1,2,\cdots)$上有定义且可微.

(2) 当$x=0$时，级数显然收敛. 当$x\neq 0$时，由于

$$\frac{\frac{|x|}{n^2+x^2}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{n^2}{n^2+x^2}|x|\to|x|\quad(n\to\infty),$$

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{n^2+x^2}$当$x\neq 0$时也收敛. 从而可知，$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{n^2+x^2}$在$(-\infty,+\infty)$上收敛. 令

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2},$$

显然它在$(-\infty,+\infty)$上收敛，故可记$f(x)=|x|\varphi(x)$. 任取$x_0\in(-\infty,+\infty)$，则有$l>0$使$-l<x_0<l$. 当$x\in[-l,l]$时，由于

$$\left|\left(\frac{1}{n^2+x^2}\right)'\right|=\left|\frac{-2x}{(n^2+x^2)^2}\right|\leqslant\frac{2l}{n^4}\quad(n=1,2,\cdots),$$

且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2l}{n^4}$收敛. 因此，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+x^2}\right)'$在$[-l,l]$上一致收敛. 从而知$\varphi(x)$在$[-l,l]$上可微，当然它在$x=x_0$点可微. 又因$|x|$在$x\neq 0$点可微，而在$x=0$点不可微，再注意到恒有$\varphi(x)>0$，即知$f(x)=|x|\varphi(x)$在$x\neq 0$点可微，而在$x=0$点不可微.

【2800】 证明:序列 $f_n(x)=\frac{1}{n}\arctan x^n(n=1,2,\cdots)$在区间$(-\infty,+\infty)$内一致收敛,但

$$[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]'_{x=1}\neq\lim_{n\to\infty}f'_n(1).$$

提示 注意$|f_n(x)|<\frac{\pi}{2n}$.

证 由于当 $x\in(-\infty,+\infty)$时,$|\arctan x^n|<\frac{\pi}{2}\quad(n=1,2,\cdots)$,故有

$$|f_n(x)|<\frac{\pi}{2n}\quad(n=1,2,\cdots).$$

易见 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x)$. 任给 $\varepsilon>0$, 选取 $N=\left[\frac{\pi}{2\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,对于一切的 $x\in(-\infty,+\infty)$,均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\pi}{2n}\leqslant\frac{\pi}{2(N+1)}<\frac{\pi}{2\cdot\frac{\pi}{2\varepsilon}}=\varepsilon.$$

于是,$f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$内一致收敛于零. 但 $f'_n(x)=\frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}$,易见

$$[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]'_{x=1}=f'(x)|_{x=1}=0,\quad \lim_{n\to\infty}f'_n(1)=\frac{1}{2}\neq0.$$

因此,两个极限不相等. 值得注意的是,$f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$内一致收敛于零,但 $f'_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$内却不一致收敛于其极限函数:

$$\lim_{n\to\infty}f'_n(x)=\begin{cases}0, & x\neq1,\\ \frac{1}{2}, & x=1.\end{cases}$$

【2801】 证明:序列 $f_n(x)=x^2+\frac{1}{n}\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$在区间$(-\infty,+\infty)$内一致收敛,但$[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]'\neq\lim_{n\to\infty}f'_n(x)$.

证 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=x^2=f(x)$. 由于当 $x\in(-\infty,+\infty)$时

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{1}{n}\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|\leqslant\frac{1}{n},$$

故对任给 $\varepsilon>0$,只要取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$,当 $n>N$ 时,对于一切$x\in(-\infty,+\infty)$,就有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此,$f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$内一致收敛.

其次,由于

$$[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]'=(x^2)'=2x,$$

而 $f'_n(x)=2x+\cos n(x+\frac{\pi}{2})$当 $n\to\infty$时极限不存在,当然有$[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]'\neq\lim_{n\to\infty}f'_n(x)$.

【2802】 试确定参数 α 取何值时下列命题为真:

(1) 序列

$$f_n(x)=n^\alpha x\mathrm{e}^{-nx}(n=1,2,\cdots)\tag{1'}$$

在闭区间$[0,1]$上收敛;

(2)序列(1')在$[0,1]$上一致收敛;

(3)$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$ 可在积分号下取极限?

解 (1) 当 $x=0$ 时,对于任意 α,均有 $f_n(x)=0$;当 $x\neq0$ 且 $x\in(0,1]$时,对于任意 α,均有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}n^\alpha x\mathrm{e}^{-nx}=0.$$

因此,对于任意的 α, $f_n(x)$在$[0,1]$上收敛于函数 $f(x)=0$.

(2) 由于 $f_n'(x)=n^\alpha e^{-nx}(1-nx)$，故当 $x=\frac{1}{n}$时，$f_n'(x)=0$. 又由于当 $x<\frac{1}{n}$时，$f_n'(x)>0$；当 $x>\frac{1}{n}$时，$f_n'(x)<0$，故 $x=\frac{1}{n}$为$f_n(x)$在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的最大值点. 因此，

$$0\leqslant f_n(x)\leqslant f_n\left(\frac{1}{n}\right)=n^{\alpha-1}e^{-1}\quad(0\leqslant x\leqslant 1).$$

当 $\alpha<1$ 且 $n\to\infty$时，$n^{\alpha-1}e^{-1}\to 0$. 于是，当 $\alpha<1$ 时，对任给的$\varepsilon>0$，总存在 N，使当 $n>N$ 时，对于一切的 $x\in[0,1]$，均有

$$|f_n(x)-0|<\varepsilon,$$

即当$\alpha<1$ 时，$f_n(x)$在$[0,1]$上一致收敛于零. 当 $\alpha\geqslant 1$ 时，由于 $f_n(\frac{1}{n})\not\to 0$，故 $f_n(x)$在$[0,1]$上不一致收敛于零.

(3) 要证明$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$ 可在积分号下取极限，即只要证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]dx. \tag{2'}$$

事实上，

$$\int_0^1[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]dx=\int_0^1 0\cdot dx=0,$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}n^\alpha\int_0^1 xe^{-nx}dx=\lim_{n\to\infty}n^\alpha\left(-\frac{1}{n}e^{-n}-\frac{1}{n^2}e^{-n}+\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha-2}(1-e^{-n}-ne^{-n}).$$

要(2′)式成立，只要下式

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=0,$$

当 $\alpha<2$ 时成立. 于是，当 $\alpha<2$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$ 可在积分号下取极限.

【2803】 证明：序列 $f_n(x)=nxe^{-nx^2}\quad(n=1,2,\cdots)$在闭区间$[0,1]$上收敛，但

$$\int_0^1[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]dx\neq\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx.$$

证 当 $x=0$ 时，对于任意的 n，$f_n(x)=0$；当 $x\neq 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$. 因此，序列 $f_n(x)$在$[0,1]$上收敛于零. 下证

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx\neq\int_0^1[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]dx.$$

注意到

$$\int_0^1[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]dx=\int_0^1 0\cdot dx=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nxe^{-nx^2}dx=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-nx^2}\right)\Big|_0^1=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-n}\right)=\frac{1}{2}\neq 0,$$

本题获证.

【2804】 证明：序列 $f_n(x)=nx(1-x)^n\quad(n=1,2,\cdots)$在闭区间$[0,1]$上收敛而不一致收敛，但

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]dx.$$

证明思路 先证 $f_n(x)$在$[0,1]$上收敛于零.

再证 $f_n(x)$在$[0,1]$上不一致收敛. 为此，取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2e}$，不论 n 多么大，只要取 $x_n=\frac{1}{n+1}$，就有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n+1}\right)-0\right|=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\to e^{-1}\quad(\text{当 } n\to\infty\text{时}).$$

最后易证 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1[\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)]dx=0$. 从而，命题获证.

证 先证 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上收敛. 事实上，当 $x=0$ 及 $x=1$ 时，对任意的 n，均有 $f_n(x)=0$；而当 $0<x<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}nx(1-x)^n=0$. 因此，$f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上收敛于零.

下证 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛. 为此，取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2\mathrm{e}}$，不论 n 多么大，只要取 $x_n=\frac{1}{n+1}$，就有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n+1}\right)-0\right|=n\cdot\frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\to\mathrm{e}^{-1}\quad(n\to\infty).$$

那么取适当大的 n_0，当 $n>n_0$ 时，就有

$$|f_n(x_n)|>\frac{1}{2\mathrm{e}}>\varepsilon_0.$$

因此，$f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

最后证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^1[\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)]\mathrm{d}x$. 注意到

$$\int_0^1[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]\mathrm{d}x=\int_0^1 0\cdot\mathrm{d}x=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx(1-x)^n\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n(1-y)y^n\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}y^{n+1}-\frac{n}{n+2}y^{n+2}\right)\Big|_0^1$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)}=0,$$

本题获证.

【2805】 在表达式 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx}{1+n^2x^4}\mathrm{d}x$ 中，在积分符号下取极限是否合理？

解 由于 $\int_0^1\left[\lim\limits_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^4}\right]\mathrm{d}x=\int_0^1 0\cdot\mathrm{d}x=0$， $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx}{1+n^2x^4}\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\arctan nx^2\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$，故在积分号下取极限不合理.

一般说来，若序列 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，则是保证在积分符号下取极限为合理的一个充分条件，但当它不一致收敛时，则就不一定能保证可以在积分符号下取极限了，本题就是其中一例. 事实上，取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$，不论 n 多么大，只要取 $x=\frac{1}{n}$，就有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-0\right|=\frac{n\cdot\frac{1}{n}}{1+n^2\cdot\frac{1}{n^4}}>\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}>\varepsilon_0,$$

故此处的 $f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^4}$ 在 $[0,1]$ 上并不一致收敛.

求极限：

【2806】 $\lim\limits_{x\to1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}$.

解题思路 利用阿贝尔判别法，易知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛. 其次，由于 $\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}$ 在 $[0,1]$ 上连续，且

$$\lim_{x\to1-0}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}\right]=\frac{(-1)^{n+1}}{2n}\quad(n=1,2,\cdots),$$

于是，当 $x\to1-0$ 时，级数可以逐项取极限，利用 2661 题的结果即可获解.

解 由于 $x\to1-0$，故可设 $0\leqslant x\leqslant1$. 此时，由于 $\frac{x^n}{x^n+1}$ 小于 1，且当 n 增加时单调下降，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛，故根据阿贝尔判别法知，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1} \qquad (1)$$

在[0,1]上一致收敛. 又因$\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}$在[0,1]上连续,且

$$\lim_{x\to 1-0}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}\right]=\frac{(-1)^{n+1}}{2n} \quad (n=1,2,\cdots),$$

故当 $x\to 1-0$ 时,级数(1)可以逐项取极限,其结果为

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lim_{x\to 1-0}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}\right]=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\frac{1}{2}\ln 2^{*)}.$$

*) 利用 2661 题的结果.

【2807】 $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n-x^{n+1})$.

解 由于 $x\to 1-0$,故可设 $0\leqslant x<1$. 在此区间上,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x^n-x^{n+1})=\sum_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)=\frac{x(1-x)}{1-x}=x, \quad 故 \quad \lim_{x\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty}(x^n-x^{n+1})=\lim_{x\to 1-0}x=1.$$

【2808】 $\lim\limits_{x\to +0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}$.

提示 仿 2806 题的解法,其结果为

$$\lim_{x\to +0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{x\to +0}\frac{1}{2^n n^x}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1.$$

解 由于$\frac{1}{n^x}$在$[0,l]$($l>0$)上单调下降且小于或等于 1,而数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$在$[0,l]$上一致收敛,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}$ 在$[0,l]$上一致收敛. 又因$\frac{1}{2^n n^x}$在$[0,l]$上连续,且$\lim\limits_{x\to +0}\frac{1}{2^n n^x}=\frac{1}{2^n}$,故当 $x\to +0$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}$可以逐项取极限,其结果为

$$\lim_{x\to +0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{x\to +0}\frac{1}{2^n n^x}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1.$$

【2809】 逐项微分级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{x}{n^2}$合理否?

提示 合理.

解 由于当$-\infty<x<+\infty$时,

$$\left(\arctan\frac{x}{n^2}\right)'_x=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{n^2}\right)^2}\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{n^2}{n^4+x^2}\leqslant\frac{1}{n^2}.$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,故逐项微分后所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\frac{x}{n^2}\right)'_x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^4+x^2}$$

在$(-\infty,+\infty)$内一致收敛,再由$\left|\arctan\frac{x}{n^2}\right|\leqslant\frac{|x|}{n^2}$知,原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{x}{n^2}$收敛;因此,原级数和的导数用逐项微分级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{x}{n^2}$来计算是合理的.

【2810】 在闭区间[0,1]上逐项积分级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}}\right)$合理否?

解 令 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(x^{\frac{1}{2k+1}}-x^{\frac{1}{2k-1}}\right)$,则 $x=0,1$ 时,$S_n(x)=0$;当 $0<x<1$ 时,$S_n(x)=x^{\frac{1}{2n+1}}-x$. 因此,

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\begin{cases}0, & x=0,1,\\ 1-x, & 0<x<1.\end{cases}$$

取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$，不论 n 多么大，只要取 $x_n=\frac{1}{2^{2n+1}}$ 就有

$$|S_n(x_n)-S(x_n)|=\frac{1}{2}>\varepsilon_0.$$

因此，$S_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

注意，对于不一致收敛的级数而言，一般地讲逐项积分级数不一定合理. 但对于本题来说，由于

$$\int_0^1\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}}\right)\right]dx=\int_0^1(1-x)dx=\frac{1}{2}$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\left(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}}\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+2}-\frac{2n-1}{2n}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2n+2}\right)-\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}\right)=\frac{1}{2},$$

故本题所给出的级数在 $[0,1]$ 上作逐项积分计算还是对的.

由此题说明，级数在 $[a,b]$ 上一致收敛仅是可以逐项积分的一个充分条件，并不是必要条件.

【2811】 设 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 是无穷多次可微的函数，且其导数 $f^{(n)}(x)(n=1,2,\cdots)$ 的序列在每一个有限区间 (a,b) 内一致收敛于函数 $\varphi(x)$. 证明：$\varphi(x)=C\,e^x$，其中 C 为常数.

证 由于 $f(x)$ 无穷多次可微，故 $f^{(n)}(x)$ 在 (a,b) 内连续可微 $(n=1,2,\cdots)$. 又按题设 $f^{(n)}(x)$ 在 (a,b) 内一致收敛于 $\varphi(x)$，且其导数序列 $f^{(n+1)}(x)(n=1,2,\cdots)$ 在 (a,b) 内也一致收敛于 $\varphi(x)$，故 $\varphi(x)$ 在 (a,b) 内可微，并且

$$\varphi'(x)=[\lim_{n\to\infty}f^{(n)}(x)]'=\lim_{n\to\infty}[f^{(n)}(x)]'=\lim_{n\to\infty}f^{(n+1)}(x)=\varphi(x).$$

积分之，即得

$$\ln\varphi(x)=x+C_1,$$

也即 $\varphi(x)=Ce^x$，其中 $C=e^{C_1}$ 为常数.

§5. 幂 级 数

1° **收敛区间** 对于每一个幂级数

$$a_0+a_1(x-a)+\cdots+a_n(x-a)^n+\cdots$$

都存在封闭的收敛区间：$|x-a|\leqslant R$，该级数在其内收敛，而在其外发散. 收敛半径 R 可按柯西—阿达马公式

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$$

来确定.

收敛半径 R 也可按公式 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ 来计算（若此极限存在）.

2° **阿贝尔定理** 若幂级数 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n(|x|<R)$ 在收敛区间的端点 $x=R$ 处收敛，则

$$S(R)=\lim_{x\to R-0}S(x).$$

3° **泰勒级数** 在点 a 解析的函数在该点的某邻域内可展开为幂级数

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

此级数的余项

$$R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

可以表示为

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\quad(0<\theta<1)\quad(\text{拉格朗日形式})$$

或

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[a+\theta_1(x-a)]}{n!}(1-\theta_1)^n(x-a)^{n+1}\quad(0<\theta_1<1)\quad(\text{柯西形式}).$$

必须记住下列五个基本展开式：

Ⅰ. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty)$.

Ⅱ. $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty)$.

Ⅲ. $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty)$.

Ⅳ. $(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots\quad(-1<x<1)$.

Ⅴ. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots\quad(-1<x\leqslant 1)$.

4° **幂级数的运算** 在公共的收敛区间 $|x-a|<R$ 内有：

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n\pm\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n(x-a)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)(x-a)^n$；

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n(x-a)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$， 式中 $c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0$；

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n\right]=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(x-a)^n$；

(4) $\int\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n\right]\mathrm{d}x=C+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$.

5° **在复数域内的幂级数** 研究级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n.$$

式中 $c_n=a_n+\mathrm{i}b_n$，$a=\alpha+\mathrm{i}\beta$，$z=x+\mathrm{i}y$，$\mathrm{i}^2=-1$. 对于每一个这样的级数都有一封闭的收敛圆 $|z-a|\leqslant R$，该级数在其内收敛(并且绝对收敛)，而在其外发散. 收敛半径 R 等于幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|r^n$$

在实数域内的收敛半径.

求下列幂级数的收敛半径和收敛区间并研究其在收敛区间端点的性质：

【2812】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^p}$.

解 记 $a_n=\frac{1}{n^p}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p=1,$$

故收敛半径 $R=1$；收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x=-1$ 时，若 $p>1$，则幂级数为绝对收敛；若 $0<p\leqslant 1$，则为条件收敛；当 $p\leqslant 0$ 时，则为发散.

当 $x=1$ 时，若 $p>1$，则为绝对收敛；若 $p\leqslant 1$，则为发散.

【2813】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$.

解 记 $a_n=\frac{3^n+(-2)^n}{n}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{1}{3},$$

故收敛半径 $R=\frac{1}{3}$；收敛区间为 $(-1-\frac{1}{3},-1+\frac{1}{3})$，即 $(-\frac{4}{3},-\frac{2}{3})$.

当 $x=-\frac{4}{3}$ 时，幂级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(-1)^n\frac{1}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}.$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛，而对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{n+1}}{\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}}=\frac{2}{3}<1,$$

故收敛. 因此，当 $x=-\frac{4}{3}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$ 条件收敛.

当 $x=-\frac{2}{3}$ 时，幂级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}.$$

由于上式右端第一个级数发散，第二个级数收敛，故原级数发散.

【2814】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$.

解 记 $a_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}$. 由于 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}=4$，故收敛半径 $R=4$；收敛区间为 $(-4,4)$.

当 $x=-4$ 时，利用斯特林公式 $n!=\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}(1+o(1))$ 得

$$\left|\frac{(n!)^2}{(2n)!}(-4)^n\right|=\frac{(\sqrt{2\pi n}\ n^n e^{-n})^2+o(1)}{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}e^{-2n}+o(1)}4^n=\sqrt{n\pi}(1+o(1))\to+\infty\quad(n\to\infty),$$

因此，当 $x=-4$ 时级数发散.

当 $x=4$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}4^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}u_n.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{2n+2}\right)=-\frac{1}{2}<1,$$

故由拉比判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

【2815】 $\sum_{n=1}^{n}a^{n^2}x^n\quad(0<a<1)$.

解 记 $a_n=a^{n^2}$. 由于 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^{2n+1}}=+\infty$，故收敛半径 $R=+\infty$；收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$.

【2816】 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$.

解 记 $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}\right]^n\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}\right\}=\frac{1}{e},$$

故收敛半径 $R=\frac{1}{e}$；收敛区间为 $(-\frac{1}{e},\frac{1}{e})$.

当 $|x|=\frac{1}{e}$ 时，由于

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\left(\frac{1}{e}\right)^n\cdot(\pm1)^n\right|\to1\neq0\quad(n\to\infty),$$

故级数发散.

【2817】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{a^{n^2}}x^n\quad(a>1)$.

解 记 $a_n=\frac{n!}{a^{n^2}}$，由于 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{2n+1}}{n+1}=+\infty$，故收敛半径 $R=+\infty$；收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$.

【2818】 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right]^p\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$.

解 记 $a_n=\left[\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}\right]^p\cdot\frac{1}{2^n}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^p=2,$$

故收敛半径 $R=2$；收敛区间为 $(-2+1,2+1)$，即 $(-1,3)$.

当 $x=-1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right]^p$，由 2689 题的结果知：若 $p>2$，为绝对收敛；若 $0<p\leqslant2$，为条件收敛；若 $p\leqslant0$，为发散.

当 $x=3$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right]^p$. 若 $p>2$，为绝对收敛；若 $p\leqslant2$，为发散.

【2819】 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right]^px^n$.

解 记 $a_n=(-1)^n\left[\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^p=2^p,$$

故收敛半径 $R=2^p$；收敛区间为 $(-2^p,2^p)$.

当 $x=-2^p$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，由于

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)^p=\left(1+\frac{1}{2n+2}\right)^p=1+\frac{p}{2n+2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=1+\frac{p}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

故由高斯判别法知：当 $\frac{p}{2}>1$（即 $p>2$）时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛（由于是正项级数，故也是绝对收敛）；当 $\frac{p}{2}\leqslant1$（即 $p\leqslant2$）时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

当 $x=2^p$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{2\cdot4\cdots(2n)}{1\cdot3\cdots(2n-1)}\right]^p,\tag{1}$$

由前段知，当 $p>2$ 时，为绝对收敛；当 $0<p\leqslant2$ 时，由于

$$\left|(-1)^n\left[\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p\right|\sim\left[\frac{4^n\cdot2n\pi\cdot n^{2n}e^{-2n}}{\sqrt{(4n+2)\pi}\,(2n+1)^{2n+1}e^{-(2n+1)}}\right]^p$$

$$=\left[\frac{4^n\cdot2\pi e}{\sqrt{(4n+2)\pi}\cdot2^{2n+1}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n+1}}\right]^p\to0\quad(n\to\infty),$$

且

$$\frac{\left[\frac{4^{n+1}[(n+1)!]^2}{(2n+3)!}\right]^p}{\left[\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p}=\left(\frac{2n+2}{2n+3}\right)^p<1,$$

故级数(1)逐项下降，根据莱布尼茨判别法知，级数(1)收敛，但由于由其绝对值组成的级数发散. 因此，当 $0<p\leqslant 2$ 时，级数(1)条件收敛. 当 $p=0$ 时，通项为 $(-1)^n$，故级数为发散；当 $p<0$ 时，通项趋于无穷，因而级数也发散.

【2820】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n$.

解 记 $a_n=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right|=1,$$

故收敛半径 $R=1$；收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x=1$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\binom{m}{n},$$

利用 2700 题的结果，即知：当 $m\geqslant 0$ 时，绝对收敛；当 $-1<m<0$ 时，条件收敛；当 $m\leqslant -1$ 时，发散.

当 $x=-1$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\binom{m}{n},$$

显见当 $m\geqslant 0$ 时为绝对收敛；当 $m<0$ 时：若 m 为负整数，设为 $-k$（k 为正整数），则通项为

$$\frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!}=\frac{(n+1)(n+2)\cdots(k+n-1)}{(k-1)!}\to+\infty\quad(n\to\infty),$$

故级数发散；若 m 不为负整数，由于通项为正，并且总可以大于 $\frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!}$，其中 $-m>k$，故级数也发散. 因此，当 $m<0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\binom{m}{n}$ 发散.

【2821】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n\quad(a>0,\ b>0)$.

解 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}x^n\quad 及\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{n^2}x^n,$$

容易求得它们的收敛半径分别为 $R_1=\frac{1}{a}$ 及 $R_2=\frac{1}{b}$，故原级数的收敛半径 $R=\min(R_1,R_2)=\min\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)$；收敛区间为 $(-R,R)$.

当 $x=-R$ 时，若 $a<b$，则级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(-\frac{1}{b}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2},\tag{1}$$

对于上式右端的第一个级数，利用达朗贝尔判别法有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{n+1}}{(-1)^n\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n}{n}}\right|=\frac{a}{b}<1,$$

故知其为绝对收敛，而第二个级数显然为绝对收敛. 因此，当 $a<b$ 时，级数(1)绝对收敛. 当 $a\geqslant b$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(-\frac{1}{a}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^n,\tag{2}$$

上式右端的第一个级数条件收敛，第二个级数绝对收敛($b<a$)或条件收敛($b=a$)，故当 $a\geqslant b$ 时，级数(2)条件收敛.

当 $x=R$ 时，若 $a<b$，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(\frac{1}{b}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

由前段知其为绝对收敛；若 $a\geqslant b$，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(\frac{1}{a}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^n,$$

它是一个发散级数与收敛级数的和，故为发散级数.

【2822】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{a^n+b^n}\quad(a>0,b>0)$.

解 记 $a_n=\dfrac{1}{a^n+b^n}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left[\max(a,b)\cdot\frac{1+\theta^{n+1}}{1+\theta^n}\right]=\max(a,b),$$

其中 $\theta=\dfrac{\min(a,b)}{\max(a,b)}$，$0<\theta\leqslant1$，故收敛半径 $R=\max(a,b)$；收敛区间为$(-R,R)$.

当 $|x|=R$ 时，由于 $\dfrac{R^n}{a^n+b^n}\to1\neq0$，故级数发散.

【2823】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{a^{\sqrt{n}}}\quad(a>0)$.

解 记 $a_n=\dfrac{1}{a^{\sqrt{n}}}$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}}=1$，故收敛半径 $R=1$；收敛区间为$(-1,1)$.

当 $x=1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a^{\sqrt{n}}}$. 由于

$$n\left(\frac{a^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{a^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}}-1\right)=\frac{a^{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}}-1}{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}}\cdot\frac{n}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}},$$

且上式右端第一个因式当 $n\to\infty$ 时趋于 $\ln a$，故当 $a>1$ 时，上式趋于 $+\infty$，因而级数收敛；当 $a<1$ 时，上式趋于 $-\infty$，因而，级数发散；而当 $a=1$ 时，由于通项为1，故级数也发散.

当 $x=-1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{a^{\sqrt{n}}}$. 当 $a>1$ 时，级数绝对收敛；当 $a\leqslant1$ 时，由于通项不趋于零，故级数发散.

总之，当 $|x|=1$ 时，若 $a>1$，则级数绝对收敛；若 $a\leqslant1$，则级数发散.

【2824】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^{-\sqrt{n}}x^n}{\sqrt{n^2+1}}$.

解 记 $a_n=\dfrac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}3^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\ \frac{\sqrt{(n+1)^2+1}}{\sqrt{n^2+1}}=1,$$

故收敛半径 $R=1$；收敛区间为$(-1,1)$.

当 $x=1$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}.\tag{1}$$

由于 $0<\dfrac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}<\dfrac{1}{3^{\sqrt{n}}}$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^{\sqrt{n}}}$ 收敛*)，故级数(1)收敛.

当 $x=-1$ 时，级数绝对收敛.

总之，当$|x|=1$时，级数绝对收敛.

*）利用 2823 题的结果.

【2825】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^n$.

解 记$a_n=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$. 由于$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+2}=1$，故收敛半径$R=1$；收敛区间为$(-1,1)$.

当$x=1$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$，由拉比判别法易知，它是发散级数.

当$x=-1$时，由于$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\frac{2n+3}{2n+2}>1$，即$|a_n|>|a_{n+1}|$，且有$|a_n|\to 0$，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$收敛. 但$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$发散，故当$x=-1$时，级数条件收敛.

【2826】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$.

解 记$a_n=\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. 由于$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=1$，故收敛半径$R=1$；收敛区间为$(-1,1)$.

当$x=-1$时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n. \tag{1}$$

由于

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n\sim\frac{1}{\sqrt{2n\pi}\ e^{-n}n^n}\left(\frac{n}{e}\right)^n=\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\geqslant\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{n}>0$$

且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故级数(1)发散.

当$x=1$时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n. \tag{2}$$

由于$\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$，故$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n=0$. 又由于

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>1\quad(n=1,2,\cdots),$$

故$|a_n|>|a_{n+1}|$. 因此，级数(2)收敛. 但由于级数(1)发散，故级数(2)条件收敛.

【2827】 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$.

解 记$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$. 由于$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1$，故收敛半径$R=1$；收敛区间为$(-1,1)$.

当$|x|=1$时，由于$a_n\to+\infty\ (n\to\infty)$，故级数发散.

【2828】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n$.

提示 记$a_n=\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}$，则$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=4$.

解 记$a_n=\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}$. 由于$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=4$，故收敛半径$R=\frac{1}{4}$；收敛区间为$\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

当$x=\frac{1}{4}$时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n\cdot 4^n}. \tag{1}$$

将它拆成两部分，一部分为 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}$，一部分为 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}}$. 前一级数显然发散；而对于后一级数，利用柯西判别法或达朗贝尔判别法易知其为收敛. 因此，级数(1)发散.

当 $x=-\frac{1}{4}$，同法可证，原级数可拆成一个发散级数与一个收敛级数. 因此，它是发散的.

【2829】 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(1+2\cos\frac{\pi n}{4}\right)^n}{\ln n}x^n$.

解 记 $a_n=\frac{\left(1+2\cos\frac{\pi n}{4}\right)^n}{\ln n}$. 由于 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=3$，故收敛半径 $R=\frac{1}{3}$；收敛区间为 $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

当 $|x|=\frac{1}{3}$ 时，对于 $n=8k$，由于

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(1+2\cos 2k\pi)^{8k}}{\ln 8k}\cdot\frac{1}{3^{8k}}\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\ln k+\ln 8}\quad 及\quad \frac{1}{\ln k+\ln 8}>\frac{1}{k+\ln 8}>0,$$

且 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+\ln 8}$ 发散，故级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\ln k+\ln 8}$ 发散.

不难证明：当 $n=8k+1,8k+2,\cdots,8k+7(k=1,2,\cdots)$ 时，级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(1+2\cos\frac{n\pi}{4}\right)^n}{\ln n}\left(\pm\frac{1}{3}\right)^n \tag{1}$$

收敛. 事实上，$\frac{1}{\ln n}$ 单调趋于零，且

$$\sum_{n=2}^{m}\left[\left|\left(1+2\cos\frac{n\pi}{4}\right)^n\right|\cdot\frac{1}{3^n}\right]\leqslant\sum_{n=2}^{m}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^n<\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^n<\frac{1+\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{2}}{3}}=\frac{1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}<5,$$

根据狄利克雷判别法可知级数(1)收敛.

于是，当 $|x|=\frac{1}{3}$ 时，原级数是由一个发散级数与诸收敛级数依次相加而成的. 因此，它是发散的.

【2830】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{2^n}$.

解 记 $a_n=\frac{1}{2^n}$. 由于 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{2}$ 及 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}}=1$，故收敛半径 $R=1$；收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $|x|=1$ 时，由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(\pm1)^{n^2}}{2^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，故原级数绝对收敛.

【2831】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}x^n$ （普林斯海姆级数）.

解 记 $a_n=\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$. 由于 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1$，故收敛半径 $R=1$；收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x=1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[n]}}{n}$，它是条件收敛的*).

当 $x=-1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]+n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n$. 记 $A_l=\{n\mid[\sqrt{n}]=l\}$ $(l=1,2,\cdots)$. 显然 A_l 内的元素可写成 $n=l^2+s$，而 $s=0,1,2,\cdots,2l$. 考虑

$$u_l=\sum_{n\in A_l}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]+n}}{n}=\sum_{s=0}^{2l}\frac{(-1)^{l^2+l+s}}{l^2+s}=\sum_{s=0}^{2l}\frac{(-1)^s}{l^2+s}$$

$$=\frac{1}{l^2}-\left(\frac{1}{l^2+1}-\frac{1}{l^2+2}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{l^2+2l-1}-\frac{1}{l^2+2l}\right)\leqslant\frac{1}{l^2}\quad(l=1,2,\cdots).$$

由于 $\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^2}$ 收敛，故 $\sum_{l=1}^{\infty}u_l$ 收敛. 注意 $A_i\cap A_j=0$ $(i\neq j)$，且 $A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots$ 就是全体正整数. 易证 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

与 $\sum\limits_{l=1}^{\infty} u_l$ 同时收敛或同时发散. 由此可见，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，因而，显然是条件收敛的.

*）利用 2672 题的结果.

【2832】 求超几何级数

$$1+\frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1 \cdot 2 \cdots n \cdot \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n+\cdots$$

的收敛域.

解 记 $a_n=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1 \cdot 2 \cdots n\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(\gamma+n)}{((\alpha+n)(\beta+n)}=1$，故收敛半径 $R=1$；收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x=1$ 时，级数为

$$1+\frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}+\cdots.$$

由于

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\theta_n}{n^2} \quad (|\theta_n|\leqslant L),$$

故当 $\gamma-\alpha-\beta+1>1$ 即 $\gamma-\alpha-\beta>0$ 时，级数收敛且也是绝对收敛的；当 $\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$ 时，级数发散.

当 $x=-1$ 时，由上可知，$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\theta_n}{n^2}$，当 $\gamma-\alpha-\beta>0$ 时，级数绝对收敛；当 $\gamma-\alpha-\beta<-1$ 时，从某项开始，将有

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|<1 \quad 即 \quad |a_n|<|a_{n+1}|,$$

a_n 不趋于零，级数发散；当 $-1<\gamma-\alpha-\beta$ 时，在弃去若干个开始项以后，就变成每项的绝对值单调递减的交错级数了，并在这里，把求通项（绝对值）的极限化成下列无穷乘积

$$\prod_{n=n_0}^{\infty}\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}$$

的值更为方便. 由于

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}=\sum_{n=n_0}^{\infty}\ln\left(1-\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\theta'_n}{n^2}\right)=-\infty \quad (|\theta'_n|\leqslant M),$$

故上述无穷乘积的值为零，即 $a_n\to 0(n\to\infty)$. 因此，级数收敛. 当 $\gamma-\alpha-\beta=-1$ 时，由于 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\theta'_n}{n^2}$，故无穷乘积的值异于零，因而 $a_n \not\to 0$，级数发散.

综上所述，现将超几何级数的敛散情况列表如下：

$\lvert x\rvert<1$		绝对收敛
$\lvert x\rvert>1$		发　散
$x=1$	$\gamma-\alpha-\beta>0$	绝对收敛
	$\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$	发　散
$x=-1$	$\gamma-\alpha-\beta>0$	绝对收敛
	$-1<\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$	条件收敛
	$\gamma-\alpha-\beta\leqslant -1$	发　散

求下列广义幂级数的收敛域：

【2833】 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

解 记 $a_n=\frac{1}{2n+1}$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1$,故当 $\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1$ (即 $x>0$)时,级数绝对收敛;当 $x<0$ 时,级数发散;当 $x=0$ 时,级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$,显然发散. 于是,级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ 的收敛域为$(0,+\infty)$.

【2834】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{2^n}$.

解 记 $a_n=\sin\frac{\pi}{2^n}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}=2,$$

故当 $\left|\frac{1}{x}\right|<2$ 即当 $|x|>\frac{1}{2}$ 时,级数绝对收敛;当 $|x|<\frac{1}{2}$ 时,级数发散;当 $|x|=\frac{1}{2}$ 时,由于

$$\lim_{n\to\infty}2^n\sin\frac{\pi}{2^n}=\pi\neq 0,$$

故级数发散. 于是,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{2^n}$ 的收敛域为$(-\infty,-\frac{1}{2})$及$(\frac{1}{2},+\infty)$,即满足不等式 $|x|>\frac{1}{2}$ 的一切 x 值所成的集合.

【2835】 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{x^n}{2^{n^2}}$.

解 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{x^n}{2^{n^2}}=\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}\frac{x^n}{2^{n^2}}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n^2}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n^2}}\cdot\frac{1}{x^n}\right)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n^2}}$.

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n^2}}$ 的收敛域为$(-\infty,+\infty)$*). 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n^2}}\cdot\frac{1}{x^n}\right)$ 的收敛域为$(-\infty,0)$及$(0,+\infty)$. 因此,级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2^{n^2}}x^n$ 的收敛域为$(-\infty,0)$及$(0,+\infty)$,即满足不等式 $0<|x|<+\infty$ 的一切 x 值所成的集合.

*) 利用 2815 题的结果.

【2836】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^{-nx}$.

解 记 $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$,则原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(e^{-x})^n$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=e^{-1},$$

故当 $|e^{-x}|<\frac{1}{e^{-1}}=e$ 即当 $1+x>0$ 或 $x>-1$ 时,级数绝对收敛;当 $x<-1$ 时,级数发散;当 $x=-1$ 时,由于

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right]^n=1\neq 0,$$

故级数发散. 于是,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^{-nx}$ 的收敛域为$(-1,+\infty)$.

【2837】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}\tan^n x$.

解 记 $a_n=\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)(3n+2)}{9(n+1)^2}=1,$$

故当 $|\tan x|<1$ 即当 $|x-k\pi|<\frac{\pi}{4}$(k 为整数)时,级数绝对收敛;当 $|x-k\pi|>\frac{\pi}{4}$ 时,级数发散. 当 $|x-k\pi|=\frac{\pi}{4}$

时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}(\pm 1)^n.$$

由于

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{(3n+1)(3n+2)}{9(n+1)^2}<1,$$

故 $|a_n|<|a_{n+1}|$，从而，$a_n \not\to 0$，级数发散. 于是，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}\tan^n x$ 的收敛域为满足不等式 $|x-k\pi|<\frac{\pi}{4}$（k 为整数）的一切 x 值所成的集合.

【2838】 按二项式 $x+1$ 的非负整数次幂展开函数 $f(x)=x^3$.

解 解法 1：$f(x)=[(x+1)-1]^3=(x+1)^3-3(x+1)^2+3(x+1)-1$.

解法 2：$f(-1)=-1$，$f'(-1)=3$，$f''(-1)=-6$，$f'''(-1)=6$，$f^{(4)}(-1)=f^{(5)}(-1)=\cdots=0$. 于是，

$$f(x)=-1+3(x+1)-\frac{6}{2!}(x+1)^2+\frac{6}{3!}(x+1)^3=-1+3(x+1)-3(x+1)^2+(x+1)^3.$$

【2839】 把函数 $f(x)=\frac{1}{a-x}$ $(a\neq 0)$ 按以下方式展开为幂级数：

(1)依 x 的幂展开；(2)依二项式 $x-b$ 的幂展开，此处 $b\neq a$；(3)依 $\frac{1}{x}$ 的幂展开. 求出相应的收敛域.

解 (1) $f(x)=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{a}}=\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a^{n+1}}$，收敛域为 $|x|<|a|$.

(2) $f(x)=\frac{1}{a-b-(x-b)}=\frac{1}{a-b}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-b}{a-b}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-b)^n}{(a-b)^{n+1}}$，收敛域为 $|x-b|<|a-b|$.

(3) $f(x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\frac{a}{x}-1}=-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-\frac{a}{x}}=-\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{x}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{x^{n+1}}$，收敛域为 $|x|>|a|$.

【2840】 按差 $x-1$ 的非负整数次幂展开函数 $f(x)=\ln x$，并说明展开式的收敛区间. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 的和.

解 $$f(x)=\ln[1+(x-1)]=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}. \qquad (1)$$

收敛区间为 $|x-1|<1$ 或 $0<x<2$.

当 $x-1=1$ 即当 $x=2$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$. 显然收敛，故当 $0<x\leqslant 2$ 时，级数(1)收敛.

由于 $\ln x$ 在 $x=2$ 连续，故当 $x=2$ 时，(1)式也成立，即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2$.

写出下列函数按变量 x 的非负整数次幂的展开式，并求出相应的收敛区间：

【2841】 $f(x)=\mathrm{sh}x$.

解 $$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

收敛区间为 $|x|<+\infty$ 或 $(-\infty,+\infty)$.

【2842】 $f(x)=\mathrm{ch}x$.

解 $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$，收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$.

【2843】 $f(x)=\sin^2 x$.

解 $f(x)=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}\left[1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$,

收敛区间为$(-\infty,+\infty)$.

【2844】 $f(x)=a^x\quad(a>0,a\neq1)$.

解 $f(x)=e^{x\ln a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n a}{n!}x^n$. 由于

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{\ln^n a}{n!}\right|}=|\ln a|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0,$$

故收敛半径$R=+\infty$;收敛区间为$(-\infty,+\infty)$.

【2845】 $f(x)=\sin(u\arcsin x)$.

解 $\arcsin x=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int_0^x\left(1+\frac{1}{2}t^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}t^4+\cdots\right)dt=x+\frac{1}{2\cdot3}x^3+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}x^5+\cdots\quad(|x|<1)$,

$$f(x)=u\arcsin x-\frac{u^3}{3!}(\arcsin x)^3+\frac{u^5}{5!}(\arcsin x)^5-\cdots$$

$$=ux+\frac{u(1^2-u^2)}{3!}x^3+\frac{u(1^2-u^2)(3^2-u^2)}{5!}x^5+\cdots,$$

收敛区间为$(-1,1)$.

【2846】 $f(x)=\cos(u\arcsin x)$.

解 $f(x)=1-\frac{u^2}{2!}(\arcsin x)^2+\frac{u^4}{4!}(\arcsin x)^4-\cdots=1-\frac{u^2}{2!}x^2-\frac{u^2(2^2-u^2)}{4!}x^4-\cdots$,

收敛区间为$(-1,1)$.

【2847】 写出函数$f(x)=x^x$按差$x-1$的非负整数次幂展开式的前三项.

解 $f(x)=x^x$, $\qquad f(1)=1$;

$f'(x)=x^x(1+\ln x)$, $\qquad f'(1)=1$;

$f''(x)=x^x(1+\ln x)^2+x^{x-1}$, $\qquad f''(1)=2$;

$f'''(x)=x^x(1+\ln x)^3+2x^{x-1}(1+\ln x)+x^{x-1}\left(\ln x+\frac{x-1}{x}\right)$, $\qquad f'''(1)=3$.

于是,展开式的前三项为

$$1+(x-1)+(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^3+\cdots,$$

收敛区间为$|x-1|<1$,即$0<x<2$.

【2848】 写出函数$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}(x\neq0)$和$f(0)=e$按变量$x$的非负整数次幂展开式的前三项.

解 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}(x\neq0)$, $\qquad f(0)=e$;

$$f'(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\frac{1}{x(1+x)}\right]=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[-\frac{1}{x^2}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\right)+\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right]$$

$$=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{1}{2}-\frac{x}{3}-\frac{1}{1+x}+o(x)\right]\qquad(x\neq0),$$

由微分学中值定理知$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\xi)$,其中$\xi$介于0与$x$之间,从而,

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}f'(\xi)=\lim_{\xi\to0}f'(\xi)=-\frac{e}{2};$$

$$f''(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left\{\left[\frac{1}{2}-\frac{x}{3}-\frac{1}{1+x}+o(x)\right]^2+\frac{2}{x^3}\ln(1+x)-\frac{1}{x^2(1+x)}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1+x)^2}\right\}$$

$$=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left\{\left[\frac{1}{2}-\frac{x}{3}-\frac{1}{1+x}+o(x)\right]^2+\frac{2}{3}-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}+o_1(x)\right\}\qquad(x\neq0),$$

仿上可得

$$f''(0)=\frac{11}{12}e;$$

$$f'''(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left\{\left[\frac{1}{2}-\frac{x}{3}-\frac{1}{1+x}+o(x)\right]^3\right.$$
$$+3\left[\frac{1}{2}-\frac{x}{3}-\frac{1}{1+x}+o(x)\right]\cdot\left[\frac{2}{3}-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}+o_1(x)\right]$$
$$\left.+\left[-\frac{6}{x^4}\ln(1+x)+\frac{2}{x^3(1+x)}+\frac{4}{x^3}+\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{(1+x)^3}\right]\right\}\quad(x\neq 0),$$

同理可得

$$f'''(0)=-\frac{21}{8}e.$$

于是,展开式的前三项为 $e\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2-\frac{7}{16}x^3+\cdots\right)$,收敛区间为$(-1,1)$.

【2849】 将函数 $\sin(x+h)$和 $\cos(x+h)$按变量 h 的非负整数次幂展开.

解 $\sin(x+h)=\sin x\cosh+\cos x\sin h=\sin x\cdot\left(1-\frac{h^2}{2!}+\frac{h^4}{4!}-\cdots\right)+\cos x\cdot\left(h-\frac{h^3}{3!}+\frac{h^5}{5!}-\cdots\right)$

$$=\sin x+h\cos x-\frac{h^2}{2!}\sin x-\frac{h^3}{3!}\cos x+\cdots.$$

同法可求得

$$\cos(x+h)=\cos x-h\sin x-\frac{h^2}{2!}\cos x+\frac{h^3}{3!}\sin x+\cdots.$$

它们的收敛区间均为$(-\infty,+\infty)$.

【2850】 不进行实际的展开工作而求函数 $f(x)=\frac{x}{x^2-5x+6}$的幂级数展开式的收敛区间:(1)依 x 的幂展开;(2)依二项式 $x-5$ 的幂展开.

解 (1) 由于

$$\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{-2}{x-2}+\frac{3}{x-3}=\frac{1}{1-\frac{x}{2}}-\frac{1}{1-\frac{x}{3}},$$

及等式右端第一项的展开式的收敛区间为$(-2,2)$,而第二项的展开式的收敛区间为$(-3,3)$,取其公共部分,即得函数 $f(x)$展为关于 x 的幂的幂级数的收敛区间为$(-2,2)$.

(2) $\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{3}{(x-5)+2}-\frac{2}{(x-5)+3}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-5}{2}}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-5}{3}}.$

上式右端第一项的展开式的收敛区间为$|x-5|<2$,而第二项展开式的收敛区间为$|x-5|<3$,取其公共部分,即得函数$f(x)$展为关于 $x-5$ 的幂的幂级数的收敛区间为$|x-5|<2$ 或$(3,7)$.

利用基本展开式 Ⅰ～Ⅴ,写出下列函数关于 x 的幂级数展开式

【2851】 e^{-x^2}.

解 $e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}\quad(|x|<+\infty).$

【2852】 $\cos^2x$.

解 $\cos^2x=\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}\quad(|x|<+\infty).$

【2853】 $\sin^3x$.

解 $\sin^3x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$$=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!}x^{2n+1}\quad(|x|<+\infty).$$

【2854】 $\frac{x^{10}}{1-x}$.

解 $\dfrac{x^{10}}{1-x}=x^{10}\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\sum\limits_{n=10}^{\infty}x^n \quad (|x|<1).$

【2855】 $\dfrac{1}{(1-x)^2}.$

解 $\dfrac{1}{(1-x)^2}=(1-x)^{-2}$

$$=1+(-2)(-x)+\frac{(-2)(-2-1)}{2!}(-x)^2+\cdots+\frac{(-2)(-2-1)\cdots(-2-n+1)}{n!}(-x)^n+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n \quad (|x|<1).$$

【2856】 $\dfrac{x}{\sqrt{1-2x}}.$

解 $\dfrac{x}{\sqrt{1-2x}}=x(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$

$$=x\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-2x)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-2x)^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(-2x)^3+\cdots\right]$$

$$=x+x^2+\frac{1\cdot 3}{2!}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!}x^4+\cdots=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1} \qquad \left(|x|<\frac{1}{2}\right).$$

当 $x=-\dfrac{1}{2}$时，上式右端为一交错级数

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

利用 2689 题的结果，即知它是收敛的.

当 $x=\dfrac{1}{2}$时，$\dfrac{x}{\sqrt{1-2x}}$无定义，故不必研究级数的敛散性. 从而，

$$\frac{x}{\sqrt{1-2x}}=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1} \quad \left(-\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{1}{2}\right).$$

【2857】 $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}.$

解 $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=\dfrac{1}{2}[\ln(1+x)-\ln(1-x)]=\dfrac{1}{2}\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(-x)^n}{n}\right]$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x|<1).$$

【2858】 $\dfrac{x}{1+x-2x^2}.$

提示 将所给函数分解为部分分式.

解 $\dfrac{x}{1+x-2x^2}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+2x}\right)=\dfrac{1}{3}\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-2)^nx^n\right]=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}[1-(-2)^n]x^n$

$$\left(|x|<\frac{1}{2}\right).$$

【2859】 $\dfrac{12-5x}{6-5x-x^2}.$

提示 仿 2858 题.

解 $\dfrac{12-5x}{6-5x-x^2}=\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{6}{6+x}=\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+\frac{x}{6}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[1+\dfrac{(-1)^n}{6^n}\right]x^n \quad (|x|<1).$

【2860】 $\dfrac{x}{(1-x)(1-x^2)}.$

提示 先将所给函数分解成部分分式，再利用基本展开式及 2855 题的结果.

解 $$\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+x}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n\,*)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)-\frac{1+(-1)^n}{2}\right]x^n$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[n+\frac{1-(-1)^n}{2}\right]x^n\qquad(|x|<1).$$

*) 利用 2855 题的结果.

【2861】 $\frac{1}{1-x-x^2}$.

解 $$\frac{1}{1-x-x^2}=\frac{1}{\frac{5}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)}+\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}+\left(x+\frac{1}{2}\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{2}{\sqrt{5}-1}\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}-1}x\right)^{-1}+\frac{2}{\sqrt{5}+1}\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}+1}x\right)^{-1}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^{n+1}+(-1)^n\left(\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)^{n+1}\right]x^n$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1}+(-1)^n\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1}\right]x^n\quad\left(|x|<\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

【2862】 $\frac{1}{1+x+x^2}$.

解 $$\frac{1}{1+x+x^2}=\frac{1}{i\sqrt{3}}\left[\frac{1}{x+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}-\frac{1}{x+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}\right]$$

$$=\frac{1}{i\sqrt{3}}\left[\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left(1+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x\right)^{-1}-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\left(1+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x\right)^{-1}\right]$$

$$=\frac{1}{i\sqrt{3}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}x^n\right]$$

$$=\frac{1}{i\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}\right]x^n.$$

由于

$$(-1)^n\left[\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$$=(-1)^n\left[\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{n+1}-\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{n+1}\right]$$

$$=(-1)^n\left[\left(\cos\frac{n+1}{3}\pi+i\sin\frac{n+1}{3}\pi\right)-\left(\cos\frac{n+1}{3}\pi-i\sin\frac{n+1}{3}\pi\right)\right]$$

$$=(-1)^n\cdot 2i\sin\frac{n+1}{3}\pi=2i\cdot(-1)^n\sin\left[(n+1)\pi-\frac{2(n+1)}{3}\pi\right]$$

$$=2i\cdot(-1)^n\left[-\cos(n+1)\pi\sin\frac{2(n+1)}{3}\pi\right]$$

$$=2i\cdot(-1)^n\cdot(-1)\cdot(-1)^{n+1}\sin\frac{2(n+1)}{3}\pi=2i\sin\frac{2(n+1)}{3}\pi,$$

故得

$$\frac{1}{1+1+x^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sin\frac{2(n+1)}{3}\pi,$$

其中 $|x|<\min\left(\frac{2}{|1+i\sqrt{3}|},\frac{2}{|1-i\sqrt{3}|}\right)=1$，即 $|x|<1$.

【2863】 $\frac{x\cos\alpha-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.

解 $$\frac{x\cos\alpha-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}=-1-\frac{1}{2}\left[\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{x-(\cos\alpha+i\sin\alpha)}+\frac{\cos\alpha-i\sin\alpha}{x-(\cos\alpha-i\sin\alpha)}\right]$$
$$=-1+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x(\cos\alpha-i\sin\alpha)}+\frac{1}{1-x(\cos\alpha+i\sin\alpha)}\right]$$
$$=-1+\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}x^n(\cos\alpha-i\sin\alpha)^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n\right]$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}x^n(\cos n\alpha-i\sin n\alpha+\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}x^n\cos n\alpha,$$

其中 $|x|<\min\left(\frac{1}{|\cos\alpha+i\sin\alpha|},\frac{1}{|\cos\alpha-i\sin\alpha|}\right)=1$，即 $|x|<1$.

【2864】 $\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$ *).

解 $$\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\frac{ix}{2}\left[\frac{1}{x-(\cos\alpha-i\sin\alpha)}-\frac{1}{x-(\cos\alpha+i\sin\alpha)}\right]$$
$$=\frac{ix}{2}\left[-\frac{\cos\alpha-i\sin\alpha}{1-x(\cos\alpha+i\sin\alpha)}+\frac{\cos\alpha-i\sin\alpha}{1-x(\cos\alpha-i\sin\alpha)}\right]$$
$$=\frac{ix}{2}\left[-\sum_{n=0}^{\infty}x^n(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}x^n(\cos\alpha-i\sin\alpha)^{n+1}\right]$$
$$=\frac{ix}{2}\sum_{n=0}^{\infty}x^n[-\cos(n+1)\alpha-i\sin(n+1)\alpha+\cos(n+1)\alpha-i\sin(n+1)\alpha]$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\sin(n+1)\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sin n\alpha,$$

其中 $|x|<1$.

*) 译本为 $\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$，两者答案实质上是相同的.

【2865】 $\frac{x\,\mathrm{sh}\alpha}{1-2x\,\mathrm{ch}\alpha+x^2}$.

解 $$\frac{x\,\mathrm{sh}\alpha}{1-2x\,\mathrm{ch}\alpha+x^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{ch}\alpha+\mathrm{sh}\alpha}{x-(\mathrm{ch}\alpha+\mathrm{sh}\alpha)}-\frac{\mathrm{ch}\alpha-\mathrm{sh}\alpha}{x-(\mathrm{ch}\alpha-\mathrm{sh}\alpha)}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{\alpha}}{x-e^{\alpha}}-\frac{e^{-\alpha}}{x-e^{-\alpha}}\right]=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{1-xe^{-\alpha}}+\frac{1}{1-xe^{\alpha}}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[-\sum_{n=0}^{\infty}x^ne^{-n\alpha}+\sum_{n=0}^{\infty}x^ne^{n\alpha}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\,\mathrm{sh}\,n\alpha,$$

其中 $|x|<\min(e^{-\alpha},e^{\alpha})=e^{-|\alpha|}$.

【2866】 $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

解 $$\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{3}{2}-n+1\right)}{n!}(-x^2)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}x^{2n}\qquad(|x|<1).$$

【2867】 $\ln(1+x+x^2+x^3)$.

解 $\ln(1+x+x^2+x^3)=\ln[(1+x)(1+x^2)]=\ln(1+x)+\ln(1+x^2)$.

但

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\quad(-1<x\leqslant 1),$$

$$\ln(1+x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}\quad(-1\leqslant x\leqslant 1),$$

故当$-1<x\leqslant 1$时，有

$$\begin{aligned}\ln(1+x+x^2+x^3)&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}\\&=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{x^m}{m}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{[\frac{m}{2}]-1}[1+(-1)^m]\frac{x^m}{m}\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}+(-1)^{[\frac{m}{2}]-1}[1+(-1)^m]}{m}x^m.\end{aligned}$$

【2868】 $e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$

解 首先注意到

$$e^{x\cos\alpha+ix\sin\alpha}=e^{x(\cos\alpha+i\sin\alpha)}=e^{xe^{i\alpha}}$$

的实部就是$e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$. 为此，先求$e^{xe^{i\alpha}}$：

$$e^{xe^{i\alpha}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(xe^{i\alpha})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}e^{in\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}(\cos n\alpha+i\sin n\alpha).$$

比较上式两端的实部，即得

$$e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n!}x^n\quad(|x|<+\infty).$$

比较虚部，还可得到

$$e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n!}x^n\quad(|x|<+\infty).$$

首先展开导数，然后用逐项积分的方法求下列函数的幂级数展开式.

【2869】 $f(x)=\arctan x$，求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$的和.

解 $\arctan x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right)dt=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$，

这里逐项积分的条件是满足的. 事实上，当$t\in[0,x]$且$|x|<1$时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}$是一致收敛的，并且各项均连续. 以下各题类似，不再一一说明. 上述级数的收敛区间为$|x|<1$，当$|x|=1$时，为交错级数，且满足莱布尼茨判别法的条件，故在端点$x=\pm 1$处，级数均收敛. 因此，级数的收敛域为$|x|\leqslant 1$，在其上展式成立.

令$x=1$，即得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}.$$

【2870】 $f(x)=\arcsin x$.

解 $\arcsin x=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int_0^x\left[1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}\right]dt=x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]$，

收敛区间为$|x|<1$. 当$|x|=1$时，利用2604题的结果，由于$\frac{p}{2}+q=\frac{1}{2}+1>1$，故级数收敛. 因此，级数的收敛域为$|x|\leqslant 1$，在其上展式成立.

【2871】 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解
$$\begin{aligned}\ln(x+\sqrt{1+x^2})&=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=\int_0^x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}\right]dt\\&=x+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right],\end{aligned}$$

收敛区间为$|x|<1$. 当$|x|=1$时，级数为绝对收敛. 因此，级数的收敛域为$|x|\leqslant 1$，在其上展式成立.

【2872】 $f(x)=\ln(1-2x\cos\alpha+x^2)$.

解
$$\ln(1-2x\cos\alpha+x^2)=\int_0^x \frac{2t-2\cos\alpha}{1-2t\cos\alpha+t^2}\mathrm{d}t=-2\int_0^x\left(\frac{1}{t}-\frac{t\cos\alpha-t^2}{1-2t\cos\alpha+t^2}\right)\mathrm{d}t$$
$$=-2\int_0^x\left(\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty}t^n\cos n\alpha\right)\mathrm{d}t^{*)}=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n}x^n,$$
收敛区间为$|x|<1$. 当$|x|=1$时，由 2698 题知，对于$0<\alpha<\pi$，级数收敛. 因此，当$0<\alpha<\pi$时，级数的收敛域为$|x|\leqslant 1$. 但当$\alpha=0$且$x=1$时，级数发散；当$\alpha=0$且$x=-1$时，级数条件收敛；当$\alpha=\pi$且$x=1$时，级数条件收敛；当$\alpha=\pi$且$x=-1$时，级数发散.

*） 利用 2863 题的结果.

【2873】 利用不同方法，求下列函数的幂级数展开式：

(1) $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$；

(2) $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x$；

(3) $f(x)=\arctan\frac{2-2x}{1+4x}$；

(4) $f(x)=\arctan\frac{2x}{2-x^2}$；

(5) $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$；

(6) $f(x)=\arccos(1-2x^2)$；

(7) $f(x)=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$；

(8) $f(x)=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$.

解 (1) $f(x)=(1+x)\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\quad(|x|<1)$,

当$|x|=1$时，级数收敛. 因此，级数的收敛域为$|x|\leqslant 1$.

(2) $f(x)=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}^{*)}+\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}^{**)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\quad(|x|<1)$.

*） 利用 2857 题的结果.

**） 利用 2869 题的结果.

(3) 由于 $f'(x)=\left(\arctan\frac{2-2x}{1+4x}\right)'=-\frac{2}{1+4x^2}$，故
$$\arctan\frac{2-2x}{1+4x}=-2\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2}+\arctan 2=-2\int_0^x\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(4t^2)^{n-1}\right]\mathrm{d}t+\arctan 2$$
$$=\arctan 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{2n-1}x^{2n-1}\quad\left(|x|<\frac{1}{2}\right).$$
当$|x|=\frac{1}{2}$时，级数为交错级数，且满足莱布尼茨判别法的条件，故收敛. 因此，级数的收敛域为$|x|\leqslant\frac{1}{2}$.

(4) 由于 $f'(x)=\left(\arctan\frac{2x}{2-x^2}\right)'=\frac{4+2x^2}{4+x^4}$，故
$$\arctan\frac{2x}{2-x^2}=\int_0^x\frac{4+2t^2}{4+t^4}\mathrm{d}t=\int_0^x\left[\left(1+\frac{t^2}{2}\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{t^4}{4}\right)^n\right]\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{[\frac{n}{2}]}\frac{t^{2n}}{2^n}\right]\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{[\frac{n}{2}]}\frac{x^{2n+1}}{2^n(2n+1)}\quad(|x|<\sqrt{2}).$$
当$|x|=\sqrt{2}$时，级数为
$$\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{[\frac{n}{2}]}\frac{1}{2n+1}\quad 及\quad -\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{[\frac{n}{2}]}\frac{1}{2n+1},$$
它们均由两收敛级数
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{4n+1}\quad 及\quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{4n+3}$$
逐项相加并分别乘以常数$\sqrt{2}$及$-\sqrt{2}$而得，故它们收敛. 因此，原级数的收敛域为$|x|\leqslant\sqrt{2}$.

(5) $f(x)=x\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}^{*)}-\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n-1} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n(2n+1)} \qquad (|x|<1).$$

当$|x|=1$时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n(2n-1)}$收敛. 因此，级数的收敛域为$|x|\leqslant 1$.

*) 利用 2869 题的结果.

(6) 由于 $f'(x)=[\arccos(1-2x^2)]'=\frac{2\operatorname{sgn}x}{\sqrt{1-x^2}}$及 $f(0)=0$，故

$$\arccos(1-2x^2)=2\operatorname{sgn}x\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=2\operatorname{sgn}x \cdot \int_0^x \left[1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}\right]\mathrm{d}t$$

$$=2\operatorname{sgn}x \cdot \left[x+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]$$

$$=2|x| \cdot \left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n}}{2n+1}\right)\right] \quad (|x|<1). \tag{1'}$$

当$|x|=1$时，级数为

$$2\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}\right)\right].$$

对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}\right]$$

应用拉比判别法：

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+5n}{(2n+1)^2}=\frac{3}{2}>1,$$

即知它是收敛的. 因此，级数(1′)的收敛域为$|x|\leqslant 1$.

(7) $f(x)=x\left[x+\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]^{*)}+\left[1-\frac{x^2}{2}-\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}x^{2n+2}\right]$

$$=1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \frac{x^{2n+2}}{2n+1} \quad (|x|<1).$$

当$|x|=1$时，对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \frac{1}{2n+1}\right]$ 应用拉比判别法：

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{10n^2+11n}{(2n+1)^2}=\frac{5}{2}>1,$$

即知它是收敛的. 因此，原级数的收敛域为$|x|\leqslant 1$.

*) 利用 2870 题的结果.

(8) $f(x)=x\left[x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]^{*)}-\left[1+\frac{1}{2}x^2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}x^{2n+2}\right]$

$$=-1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \frac{x^{2n+2}}{2n+1}\right] \quad (|x|\leqslant 1).$$

*) 利用 2871 题的结果.

【2874】 利用展开式

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots$$

的唯一性，求下列函数的 n 阶导数：(1) $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$；(2)+ $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{a}{x}}$；(3)+ $f(x)=\arctan x$.

解 (1) $f(x+h)-f(x)=\mathrm{e}^{(x+h)^2}-\mathrm{e}^{x^2}=\mathrm{e}^{x^2}(\mathrm{e}^{2xh+h^2}-1)$

$$=\mathrm{e}^{x^2}\left[(2xh+h^2)+\frac{1}{2!}(2xh+h^2)^2+\cdots+\frac{1}{n!}(2xh+h^2)^n+\cdots\right],$$

其中 h^n 的系数为

$$e^{x^2}\left[\frac{1}{n!}(2x)^n+\frac{1}{(n-1)!}C_{n-1}^1(2x)^{n-2}+\frac{1}{(n-2)!}C_{n-2}^2(2x)^{n-4}+\cdots\right]$$
$$=\frac{e^{x^2}}{n!}\left[(2x)^n+\frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}+\cdots\right].$$

将 $f(x+h)-f(x)$ 的展开式中 h^n 的系数 $\frac{f^{(n)}(x)}{n!}$ 与之比较，即得

$$(e^{x^2})^{(n)}=e^{x^2}\left[(2x)^n+\frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}+\cdots\right]$$

(2) $$f(x+h)-f(x)=e^{\frac{a}{x+h}}-e^{\frac{a}{x}}=e^{\frac{a}{x}}(e^{-\frac{ah}{x(x+h)}}-1)=e^{\frac{a}{x}}(e^{\frac{-a\frac{h}{x^2}}{1+\frac{h}{x}}}-1)$$
$$=e^{\frac{a}{x}}\left[e^{-\frac{ah}{x^2}+\frac{ah^2}{x^3}-\frac{ah^3}{x^4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{ah^{n+1}}{x^{n+2}}+\cdots}-1\right]$$
$$=e^{\frac{a}{x}}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{ah^{n+1}}{x^{n+2}}\right]^m\right\}$$
$$=e^{\frac{a}{x}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^m}{m!x^m}\sum_{k_1=0}^{\infty}(-1)^{k_1+1}\left(\frac{h}{x}\right)^{k_1+1}\sum_{k_2=0}^{\infty}(-1)^{k_2+1}\left(\frac{h}{x}\right)^{k_2+1}\cdots\sum_{k_m=0}^{\infty}(-1)^{k_m+1}\left(\frac{h}{x}\right)^{k_m+1}$$
$$=e^{\frac{a}{x}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^m}{m!x^m}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k_1+\cdots+k_m=s}(-1)^{k_1+\cdots+k_m+m}\left(\frac{h}{x}\right)^{k_1+\cdots+k_m+m}$$
$$=e^{\frac{a}{x}}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^m a^m}{m!x^m}\left(\frac{h}{x}\right)^m\sum_{s=0}^{\infty}\Big(\sum_{k_1+\cdots+k_m=s}1\Big)(-1)^s\left(\frac{h}{x}\right)^s\right]$$
$$=e^{\frac{a}{x}}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^m a^m}{m!x^m}\left(\frac{h}{x}\right)^m\sum_{s=0}^{\infty}C_{s+m-1}^s(-1)^s\left(\frac{h}{x}\right)^s\right]^{*)}$$
$$=e^{\frac{a}{x}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+s}a^m}{m!x^m}\left(\frac{h}{x}\right)^{m+s}C_{s+m-1}^s=e^{\frac{a}{x}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{s+m=n\\ s\geqslant 0,\ m\geqslant 1}}\frac{(-1)^n a^m}{m!x^m}\left(\frac{h}{x}\right)^n C_{n-1}^s$$
$$=e^{\frac{a}{x}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^n}\left(\frac{h}{x}\right)^n\sum_{\substack{s+m=n\\ s\geqslant 0,\ m\geqslant 1}}C_{n-1}^s x^{n-m}\frac{a^m}{m!}$$
$$=e^{\frac{a}{x}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^{2n}}h^n\sum_{s=0}^{n-1}C_{n-1}^s\frac{x^s a^{n-s}}{(n-s)!}=e^{\frac{a}{x}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}A_n h^n,$$

其中 $A_n=\frac{(-1)^n}{x^{2n}}\sum_{s=0}^{n-1}s!\ C_n^s C_{n-1}^s a^{n-s}x^s$.

于是，比较 h^n 的系数，即得

$$(e^{\frac{a}{x}})^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{2n}}e^{\frac{a}{x}}\sum_{s=0}^{n-1}s!\,C_n^s C_{n-1}^s a^{n-s}x^s$$
$$=\frac{(-1)^n}{x^{2n}}e^{\frac{a}{x}}\left[a^n+\frac{n(n-1)}{1!}a^{n-1}x+\frac{n(n-1)\cdot(n-1)(n-2)}{2!}a^{n-2}x^2\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)\cdot(n-1)(n-2)(n-3)}{3!}a^{n-3}x^3+\cdots\right]$$

*) 其中 $\sum\limits_{\substack{k_1+\cdots+k_m=s\\ k_1\geqslant 0,\cdots,k_m\geqslant 0}}1=C_{s+m-1}^s$ 推导如下：

令 $|t|<1$，一方面由 $\frac{1}{1-t}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}t^k$ 得

$$\left(\frac{1}{1-t}\right)^m=\sum_{k_1=0}^{\infty}t^{k_1}\sum_{k_2=0}^{\infty}t^{k_2}\cdots\sum_{k_m=0}^{\infty}t^{k_m}=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k_1+\cdots+k_m=s}t^{k_1+k_2+\cdots+k_m}=\sum_{s=0}^{\infty}\Big(\sum_{k_1+\cdots+k_m=s}1\Big)t^s=\sum_{s=0}^{\infty}P_s t^s,$$

其中 $P_s=\sum\limits_{k_1+\cdots+k_m=s}1$. 另一方面，又由

$$\left(\frac{1}{1-t}\right)^m=(1-t)^{-m}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-m)(-m-1)\cdots(-m-s+1)}{s!}(-1)^s t^s$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{2s}\frac{m(m+1)\cdots(m+s-1)}{s!}t^s=\sum_{s=0}^{\infty}C_{m+s-1}^s t^s,$$

由幂级数展开的唯一性，即知 $P_s=C_{m+s-1}^s$.

(3) 根据 $\arctan x+\arctan y=\arctan\frac{x+y}{1-xy}$，令 $y=\dfrac{\frac{h}{1+x^2}}{1+\frac{x}{1+x^2}h}$，就有 $\frac{x+y}{1-xy}=x+h$. 于是，

$$f(x+h)-f(x)=\arctan(x+h)-\arctan x=\arctan\frac{x+y}{1-xy}-\arctan x=\arctan y$$

$$=\arctan\left(\frac{h}{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{1+x^2}h}\right).$$

由 2869 题的结果知，当 $|y|\leqslant 1$ 时，有

$$\arctan y=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{y^{2m+1}}{2m+1}.$$

而当 h 很小(且 $|x|\leqslant 1$)时，有

$$y=\frac{h}{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{1+x^2}h}=\frac{h}{1+x^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{x}{1+x^2}h\right)^k.$$

于是，

$$f(x+h)-f(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{2m+1}\left[\frac{h}{1+x^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{x}{1+x^2}h\right)^k\right]^m$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{2m+1}\left(\frac{h}{1+x^2}\right)^m\cdot\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_m=0}^{\infty}(-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_m}\left(\frac{xh}{1+x^2}\right)^{k_1+k_2+\cdots+k_m}$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{2m+1}\left(\frac{h}{1+x^2}\right)^m\cdot\sum_{s=0}^{\infty}\Big(\sum_{k_1+\cdots+k_m=s}1\Big)(-1)^s\left(\frac{xh}{1+x^2}\right)^s$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{2m+1}\left(\frac{h}{1+x^2}\right)^{m+s}x^s(-1)^s C_{m+s-1}^s$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{m+s=n\\ m\geqslant 1,\ s\geqslant 0}}(-1)^{m+s}\left(\frac{h}{1+x^2}\right)^{m+s}\frac{x^s}{2m+1}C_{m+s-1}^s=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{h}{1+x^2}\right)^n A_n,$$

其中 $A_n=\sum\limits_{\substack{m+s=n\\ m\geqslant 1,\ s\geqslant 0}}\frac{x^s}{2m+1}C_{n-1}^s=\sum\limits_{s=0}^{n-1}\frac{x^s}{2(n-s)+1}C_{n-1}^s\quad(n=1,2,\cdots)$.

因此，比较 h^n 的系数，即得

$$(\arctan x)^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{(1+x^2)^n}A_n=(-1)^n\frac{n!}{(1+x^2)^n}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{x^s}{2(n-s)+1}C_{n-1}^s$$

$$=(-1)^n\frac{n!}{(1+x^2)^n}\left[\frac{1}{3}x^{n-1}+\frac{1}{5}(n-1)x^{n-2}+\cdots\right].$$

【2875】 依二项式 $x+1$ 的正整数次幂展开函数 $f(x)=\ln\dfrac{1}{2+2x+x^2}$.

解 $f(x)=-\ln[1+(x+1)^2]=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x+1)^{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+1)^{2n}}{n}$,

收敛域为 $|x+1|\leqslant 1$ 或 $-2\leqslant x\leqslant 0$.

【2876】 把函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 按变量 x 的负整数次幂展开成幂级数.

提示 注意 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}=-\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{x}}\ (|x|>1)$.

解 $f(x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\frac{1}{x}-1}=-\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{x^n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}\quad(|x|>1).$

【2877】 把函数 $f(x)=\ln x$ 按分式$\frac{x-1}{x+1}$的正整数次幂展开成幂级数.

提示 注意 $f(x)=\ln x=\ln\frac{1+\frac{x-1}{x+1}}{1-\frac{x-1}{x+1}}\ (x>0)$，并利用 2857 题的结果.

解 $f(x)=\ln\frac{1+\frac{x-1}{x+1}}{1-\frac{x-1}{x+1}}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1\ *)}\quad(x>0).$

*) 利用 2857 题的结果.

【2878】 把函数 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$按分式$\frac{x}{1+x}$的正整数次幂展开成幂级数.

解 $f(x)=\frac{x}{1+x}\sqrt{1+x}=\frac{x}{1+x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{x+1}}}=\frac{x}{1+x}\left(1-\frac{x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$=\frac{x}{1+x}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^n\right]=\frac{x}{1+x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{n+1}.$$

当$\left|\frac{x}{1+x}\right|<1$即当$x>-\frac{1}{2}$时，级数收敛. 当$x=-\frac{1}{2}$时，由 2689 题的结果知，它条件收敛. 因此，级数的收敛域为$x\geqslant-\frac{1}{2}$.

【2879】 设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$，直接证明：$f(x)f(y)=f(x+y)$.

证 $f(x)f(y)=\sum_{n_1=0}^{\infty}\frac{x^{n_1}}{(n_1)!}\sum_{n_2=0}^{\infty}\frac{y^{n_2}}{(n_2)!}=\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\frac{1}{(n_1)!(n_2)!}x^{n_1}y^{n_2}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n_1+n_2=n}\frac{1}{(n_1)!\ (n_2)!}x^{n_1}y^{n_2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{n_1+n_2=n}\frac{n!}{(n_1)!(n_2)!}x^{n_1}y^{n_2}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{n_1=0}^{n}C_n^{n_1}x^{n_1}y^{n-n_1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x+y)^n=f(x+y).$$

上述级数在$|x|<+\infty$及$|y|<+\infty$上绝对收敛，故重新组合是允许的.

事实上，$f(x)=e^x$，等式 $f(x)f(y)=f(x+y)$ 即为指数函数的特征.

【2880】 若我们定义

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

证明：(1) $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$； (2) $\sin^2x+\cos^2x=1$.

证 由于 $\sin x$ 及 $\cos x$ 的幂级数展开式在$|x|<+\infty$内绝对收敛，故级数相乘或相加、减均仍绝对收敛，且可重新组合. 因此，以下的级数运算都是合理的.

(1) $\sin x\cos x=\sum_{n_1=0}^{\infty}(-1)^{n_1}\frac{x^{2n_1+1}}{(2n_1+1)!}\sum_{n_2=0}^{\infty}(-1)^{n_2}\frac{x^{2n_2}}{(2n_2)!}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1\geqslant0,\ n_2\geqslant0}}(-1)^{n_1+n_2}\frac{x^{2n_1+2n_2+1}}{(2n_1+1)!(2n_2)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n x^{2n+1}\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1\geqslant0,\ n_2\geqslant0}}\frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2)!}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nA_n x^{2n+1},$$

其中 $A_n=\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1\geqslant 0,\ n_2\geqslant 0}}\frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2)!}=\sum_{\substack{(2n_1+1)+(2n_2)=2n+1\\ n_1\geqslant 0,\ n_2\geqslant 0}}\frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2)!}$

$$=\frac{1}{(2n+1)!}\sum_{\substack{k_1+k_2=2n+1\\ k_1\text{一奇数}\\ k_2\text{一偶数}}}\frac{(2n+1)!}{(k_1)!(k_2)!}=\frac{1}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{2}\left(\sum_{k_1\text{奇},\,k_2\text{偶}}+\sum_{k_1\text{偶},\,k_2\text{奇}}\right)$$

$$=\frac{1}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(2n+1)!}{k!(2n+1-k)!}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2n+1)!}2^{2n+1}.$$

从而得 $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}\sin 2x.$

(2) $\sin^2x+\cos^2x$

$$=\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}(-1)^{n_1+n_2}\frac{x^{2(n_1+n_2)+2}}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!}+\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}(-1)^{k_1+k_2}\frac{x^{2(k_1+k_2)}}{(2k_1)!\ (2k_2)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^nx^{2n+2}\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1\geqslant 0,\ n_2\geqslant 0}}\frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!}\right]+\sum_{m=0}^{\infty}\left[(-1)^mx^{2m}\sum_{\substack{k_1+k_2=m\\ k_1\geqslant 0,\ k_2\geqslant 0}}\frac{1}{(2k_1)!(2k_2)!}\right]$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}+\sum_{n=0}^{\infty}=1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n+2}A_n,$$

其中

$$A_n=\sum_{\substack{k_1+k_2=n+1\\ k_1\geqslant 0,\ k_2\geqslant 0}}\frac{1}{(2k_1)!(2k_2)!}-\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1\geqslant 0,\ n_2\geqslant 0}}\frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!}$$

$$=\frac{1}{(2n+2)!}\left[\sum_{\substack{2k_1+2k_2=2n+2\\ k_1\geqslant 0,\ k_2\geqslant 0}}\frac{(2n+2)!}{(2k_1)!(2k_2)!}-\sum_{\substack{(2n_1+1)+(2n_2+1)=2n+2\\ k_1\geqslant 0,\ k_2\geqslant 0}}\frac{(2n+2)!}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!}\right]$$

$$=\frac{1}{(2n+2)!}\left[\sum_{k'=0,2,\cdots,2n+2}C_{2n+2}^{k'}-\sum_{l'=1,3,\cdots,2n+1}C_{2n+2}^{l'}\right]$$

$$=\frac{1}{(2n+2)!}\left[\sum_{s=0,2,\cdots,2n+2}(-1)^sC_{2n+2}^{s}+\sum_{s=1,3,\cdots,2n+1}(-1)^sC_{2n+2}^{s}\right]$$

$$=\frac{1}{(2n+2)!}\sum_{s=0}^{2n+2}(-1)^sC_{n+2}^{s}=\frac{1}{(2n+2)!}[1+(-1)]^{2n+2}=0\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

因而得 $\sin^2x+\cos^2x=1\quad(|x|<+\infty).$

【2881】 写出函数 $f(x)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}\right]^{-1}$ 的幂级数展开式中的若干项.

解 $f(x)=\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+\cdots\right)^{-1}$

$$=1-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+\cdots\right)+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+\cdots\right)^2-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+\cdots\right)^3+\cdots$$

$$=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{12}-\frac{x^3}{24}-\cdots\quad(|x|<1).$$

对幂级数进行相应的运算,从而求出下列函数的幂级数展开式:

【2882】 $f(x)=(1+x)e^{-x}$.

解 $f(x)=(1+x)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}=1+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n!}+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right]x^n$

$$=1+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{n!}x^n\quad(|x|<+\infty).$$

【2883】 $f(x)=(1-x)^2\operatorname{ch}\sqrt{x}$.

解 当 $x\geqslant 0$ 时，

$$\operatorname{ch}\sqrt{x}=\frac{e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}}{2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{n!}+\frac{(-1)^n}{n!}\right]x^{\frac{n}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!};$$

当 $x<0$ 时，易知 $\operatorname{ch}\sqrt{x}=\cos\sqrt{|x|}$，从而，

$$\operatorname{ch}\sqrt{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\sqrt{|x|})^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!},$$

故 $\operatorname{ch}\sqrt{x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}$ $(|x|<+\infty)$. 于是，

$$f(x)=(1-2x+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}=1-\frac{3}{2}x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n)!}-\frac{2}{(2n-2)!}+\frac{1}{(2n-4)!}\right]x^n$$

$$(|x|<+\infty).$$

【2884】 $f(x)=\ln^2(1-x)$.

解 $f(x)=\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots\right)^2$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{1\cdot n}+\frac{1}{2(n-1)}+\frac{1}{3(n-2)}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 1}\right]x^{n+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n-1}\right)\frac{1}{n+1}+\cdots+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{1}\right)\frac{1}{n+1}\right]x^{n+1}$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}\quad(|x|<1).$$

当 $x=-1$ 时，级数为

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}.$$

由于

$$\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1}>\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{n+2}\quad(n=2,3,\cdots),$$

并且有

$$\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1}=\frac{C+\ln n+\varepsilon_n}{n+1}{}^{*)}\to 0\quad(n\to\infty),$$

故它是收敛的.

当 $x=1$ 时，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{C}{n+1}$ 发散且原级数为正项级数，故 $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1}$ 也发散. 因此，级数

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

的收敛域为 $-1\leqslant x<1$.

*） 利用 146 题的结果.

【2885】 $f(x)=(1+x^2)\arctan x$.

解 $f(x)=(1+x^2)\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}{}^{*)}=x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)x^{2n+1}$

$$=x+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}\quad(|x|\leqslant 1).$$

*） 利用 2869 题的结果.

【2886】 $f(x)=e^x\cos x$.

提示 注意 $e^x(\cos x+i\sin x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$.

解 $e^x\cos x$ 为 $e^x(\cos x+i\sin x)$ 的实部. 由于

$$e^x(\cos x+\mathrm{i}\sin x)=e^x e^{\mathrm{i}x}=e^{(1+\mathrm{i})x}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[(1+\mathrm{i})x]^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}(1+\mathrm{i})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4}\right),$$

比较上式两端的实部，即得 $e^x\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n \quad (|x|<+\infty)$.

【2887】 $f(x)=e^x\sin x$.

提示 利用 2886 题的等式.

解 利用 2886 题的等式，并比较此等式两端的虚部，即得

$$e^x\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n \qquad (|x|<+\infty).$$

【2888】 $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x}$.

解 $f(x)=\sum_{n_1=0}^{\infty}(-1)^{n_1}x^{n_1}\sum_{n_2=0}^{\infty}(-1)^{n_2}\frac{x^{n_2+1}}{n_2+1}$

$$=\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}(-1)^{n_1+n_2}\frac{x^{n_1+n_2+1}}{n_2+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n x^{n+1}\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1\geqslant 0,\ n_2\geqslant 0}}\frac{1}{n_2+1}\right]$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n\right] \quad (|x|<1).$$

当 $|x|=1$ 时，通项的绝对值 $\geqslant 1$，显然发散. 因此，级数的收敛域为 $|x|<1$.

【2889】 $f(x)=(\arctan x)^2$.

解 $f(x)=\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\right)^{2*)}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{1}{(2n-1)\cdot 1}+\frac{1}{(2n-3)\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{1\cdot(2n-1)}\right]x^{2n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{1}\right)\frac{1}{2n}+\left(\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{3}\right)\frac{1}{2n}+\cdots+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2n-1}\right)\frac{1}{2n}\right]x^{2n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)\frac{x^{2n}}{n} \quad (|x|\leqslant 1).$$

*) 利用 2869 题的结果.

【2890】 $f(x)=\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2$.

解 令 $\varphi(x)=(\arcsin x)^2=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\ (-1<x<1)$，则

$$\varphi'(x)=\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \quad (-1<x<1).$$

由于 $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$，故 $a_0=a_1=0$. 由 $\sqrt{1-x^2}\varphi'(x)=2\arcsin x$ 得

$$\sqrt{1-x^2}\varphi''(x)-\frac{x\varphi'(x)}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1<x<1).$$

即

$$(1-x^2)\varphi''(x)-x\varphi'(x)=2 \quad (-1<x<1),$$

将 $\varphi(x)$ 的展开式代入，并注意到 $a_0=a_1=0$，可得

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}na_n x^n=2$$

或 $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n^2 a_n x^n = 2$，也即

$$2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - n^2 a_n] x^n = 2 \quad (-1 < x < 1).$$

比较上式 x 的同次幂的系数，得

$$a_2 = 1, \quad a_3 = 0, \quad a_{n+2} = \frac{n^2}{(n+2)(n+1)} a_n \quad (n \geqslant 2).$$

从而可得

$$a_{2k+1} = 0, \quad a_{2k+2} = \frac{2[(2k)!!]^2}{(2k+2)!} = \frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

于是，

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!} x^{2k+2} \quad (-1 < x < 1).$$

从而得

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!} x^{2k} \quad (-1 < x < 1).$$

显然右端的幂级数当 $x = \pm 1$ 时均收敛，而左端的函数当 $x = \pm 1$ 时连续，故由幂级数的阿贝尔定理知，上述展式当 $x = 1$ 及 $x = -1$ 时也成立.

将下列函数按变量 x 的正整数次幂展开成幂级数，写出展开式（异于零）的前三项：

【2891】 $f(x) = \tan x$.

解 解法 1：直接应用泰勒公式，先求导数，有

$f(x) = \tan x$，　　$f(0) = 0$；

$f'(x) = \sec^2 x$，　　$f'(0) = 1$；

$f''(x) = 2\sec^2 x \tan x$，　　$f''(0) = 0$；

$f'''(x) = 2\sec^4 x + 4\sec^2 x \tan^2 x$，　　$f'''(0) = 2$；

$f^{(4)}(x) = 8\sec^4 x \tan x + 8\sec^2 x \tan^3 x + 8\sec^4 x \tan x$，　　$f^{(4)}(0) = 0$；

$f^{(5)}(x) = 32\sec^4 x \tan^2 x + 8\sec^6 x + 16\sec^2 x \tan^4 x + 24\sec^4 x \tan^2 x + 32\sec^4 x \tan^2 x + 8\sec^6 x$，

$f^{(5)}(0) = 16$；

$\vdots$

于是，$f(x) = x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{16}{5!}x^5 + \cdots = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots \quad (|x| < \frac{\pi}{2})$.

解法 2：当 $|x| < \frac{\pi}{2}$ 时，记 $\xi = 1 - \cos x$，则 $|\xi| < 1$，有

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x \cdot \frac{1}{1-\xi} = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{x^{2l-1}}{(2l-1)!} \sum_{m=0}^{\infty} \xi^m$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{x^{2l-1}}{(2l-1)!} + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{x^{2l-1}}{(2l-1)!} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k}}{(2k!)} \right]^m$$

$$= x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{x^{2l-1}}{(2l-1)!} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=1}^{\infty} (-1)^{k_1+\cdots+k_2+m} \frac{x^{2(k_1+\cdots+k_m)}}{(2k_1)!\cdots(2k_m)!}$$

$$= x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=m}^{\infty} \sum_{k_1+\cdots+k_m=s} (-1)^{s+l+m-1} \frac{x^{2s+2l-1}}{(2l-1)!(2k_1)!\cdots(2k_m)!}$$

$$= x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-1} \cdot \sum_{\substack{l+s=m \\ l \geqslant 1}} \sum_{1 \leqslant m \leqslant s} \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=s \\ k_1 \geqslant 1, \cdots, k_m \geqslant 1}} (-1)^m \frac{1}{(2l-1)!(2k_1)!\cdots(2k_m)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^{2n-1},$$

其中 $A_1=1$，而当 $n\geqslant 2$ 时，有

$$A_n=(-1)^{n-1}\left[\frac{1}{(2n-1)!}+\sum_{\substack{l+s=n\\ l\geqslant 1}}\sum_{1\leqslant m\leqslant s}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=s\\ k_1\geqslant 1,\cdots,k_m\geqslant 1}}\frac{(-1)^m}{(2l-1)!(2k_1)!\cdots(2k_m)!}\right].$$

例如，当 $n=2$ $(l=1,\ s=1,\ m=1,\ k_1=1)$ 时，得

$$A_2=\frac{1}{3};$$

当$n=3$ $(l=2,\ s=1,\ m=1,\ k_1=1;\ l=1,\ s=2,\ m=1,\ k_1=2;l=1,\ s=2,\ m=2,\ k_1=1,\ k_2=1)$ 时，得

$$A_3=\frac{1}{5!}+(-1)\frac{1}{3!\ 2!}+(-1)\frac{1}{4!}+\frac{1}{2!\ 2!}=\frac{2}{15},$$

等等. 于是，有 $\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\cdots\quad(|x|<\frac{\pi}{2})$.

【2892】 $f(x)=\mathrm{th}x$.

解 运用幂级数展开式的唯一性定理，为求展开式可以考虑在 $x=0$ 点附近作幂级数展开. 注意当 $|x|$ 很小，且幂级数中常数项为零时，其收敛的和是很小的. 于是，以下的写法是可以的，取其前三项，有

$$f(x)=\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=\frac{x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots}{1+\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)}$$

$$=\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)\left[1-\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)+\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2-\cdots\right]$$

$$=\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{5x^4}{24}+\cdots\right)=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\cdots\quad(|x|<\frac{\pi}{2}).$$

如果详细一些，可进一步叙述如下：

首先，可有一特殊的幂级数$\frac{e^x-1}{x}=1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots$. 如若$|x|<\rho$ 且 $\frac{\frac{\rho}{2}}{1-\frac{\rho}{3}}=1$，例如，取 $\rho=\frac{6}{5}=1.2$ 时，

有$\frac{\rho}{2!}+\frac{\rho^2}{3!}+\cdots\leqslant 1$，此时得

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+\cdots\quad(|x|<1.2).$$

易见 $A_3=0,\ A_5=0,\ A_7=0,\ \cdots$. 于是，上式可改写为

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+B_1\cdot\frac{x^2}{2!}-B_2\cdot\frac{x^4}{4!}+B_3\cdot\frac{x^6}{6!}-\cdots,\tag{1}$$

其中 $B_1,B_2,B_3,\cdots$为伯努利(Bernoulli)常数*)，有

$$B_1=\frac{1}{6},\ B_2=\frac{1}{30},\ B_3=\frac{1}{42},\ B_4=\frac{1}{30},\ B_5=\frac{5}{66},\ \cdots.$$

由 $x\coth\frac{x}{2}=x\cdot\frac{e^x+1}{e^x-1}=\frac{2x}{e^x-1}+x$ 及(1)式，即得

$$\frac{x}{2}\coth\frac{x}{2}=1+B_1\frac{x^2}{2!}-B_2\frac{x^4}{4!}+B_3\frac{x^6}{6!}-\cdots.$$

于是，

$$x\coth x=1+B_1\frac{2^2x^2}{2!}-B_2\frac{2^4x^4}{4!}+B_3\frac{2^6x^6}{6!}-\cdots.$$

若 $x\neq 0$，则

$$\coth x=\frac{1}{x}+B_1\frac{2^2x}{2!}-B_2\frac{2^4x^3}{4!}+B_3\frac{2^6x^5}{6!}-\cdots.\tag{2}$$

注意到 $\mathrm{th}x=2\coth 2x-\coth x$ 及当 $x=0$ 时，$\mathrm{th}x=0$，由(2)式即有

$$\mathrm{th}x=\frac{B_1}{2!}(2^4-2^2)x-\frac{B_2}{4!}(2^8-2^4)x^3+\frac{B_3}{6!}(2^{12}-2^6)x^5-\cdots=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7+\cdots.\tag{3}$$

还可指出的是，它的系数与 $\tan x$ 展开式相应项的系数的绝对值是相同的，两者相应各系数只是符号上有交错变异而已(可参看本题解末加注的 Bromwich 所著一书的相应章节)，而 $\tan x$ 的幂级数展开式当 $|x|<\frac{\pi}{2}$ 时收敛，故上述的级数(3)当 $|x|<\frac{\pi}{2}$ 时收敛.

*) 参看 Bromwich 著 An introduction to the theory of infinite series 一书第十一章 100 款.

【2893】 $f(x)=\cot x-\frac{1}{x}$

解 与 2892 题的想法一样，可以考虑 $x\neq 0$ 且 $|x|$ 很小的情形. 于是，有

$$f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots}{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots}-\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{x}\left\{\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)\left[1+\left(\frac{x^2}{3!}-\frac{x^4}{5!}+\frac{x^6}{7!}-\cdots\right)+\left(\frac{x^2}{3!}-\frac{x^4}{5!}+\frac{x^6}{7!}-\cdots\right)^2+\cdots\right]-1\right\}$$

$$=\frac{1}{x}\left\{\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{7}{360}x^4+\frac{31}{15120}x^6+\cdots\right)-1\right\}$$

$$=\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{45}x^4-\frac{2}{945}x^6-\cdots\right)=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{45}x^3-\frac{2}{945}x^5-\cdots\quad(0<|x|<\pi).$$

一般说来，为求通项可作如下进一步的讨论：

考虑当 $x\neq 0$ 时，$g(x)=xf(x)=x\cot x-1$，而当 $|x|<\pi$ 时，有

$$g(x)=x\cot x-1=\frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x}}-1=\frac{\cos x}{1-\xi}-1,$$

其中 $\xi=1-\frac{\sin x}{x}$. 注意到 $|\sin x|<|x|$，故 $|\xi|<1$. 因而，

$$g(x)=\cos x\sum_{m=0}^{\infty}\xi^m-1=\left[1+\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{x^{2l}}{(2l)!}\right]\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\xi^m\right)-1$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\xi^m+\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{x^{2l}}{(2l)!}+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{x^{2l}}{(2l)!}\xi^m.$$

由于 $\xi=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$，故有

$$\xi^m=\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_m=1}^{\infty}(-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_m+m}\frac{x^{2(k_1+k_2+\cdots+k_m)}}{(2k_1+1)!(2k_2+1)!\cdots(2k_m+1)!}$$

$$=\sum_{s=m}^{\infty}\sum_{k_1+\cdots+k_m=s}(-1)^{s+m}\frac{x^{2s}}{(2k_1+1)!\cdots(2k_m+1)!}.$$

从而，

$$\sum_{m=1}^{\infty}\xi^m=\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{1\leqslant m\leqslant s}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=s\\k_1\geqslant 1,\cdots,k_m\geqslant 1}}(-1)^{s+m}\frac{x^{2s}}{(2k_1+1)!\cdots(2k_m+1)!}=\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^sA_sx^{2s},$$

其中

$$A_s=\sum_{1\leqslant m\leqslant s}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=s\\k_1\geqslant 1,\cdots,k_m\geqslant 1}}\frac{(-1)^m}{(2k_1+1)!\cdots(2k_m+1)!}\quad(s=1,2,\cdots).$$

又有

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{x^{2l}}{(2l)!}\xi^m=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{s=m}^{\infty}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=s\\k_1\geqslant 1,\cdots,k_m\geqslant 1}}(-1)^{s+m+l}\frac{x^{2s+2l}}{(2l)!(2k_1+1)!\cdots(2k_m+1)!}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^nB_nx^{2n},$$

其中

$$B_n=\sum_{\substack{s+l=m\\ s\geqslant 1,\ l\geqslant 1}}\sum_{1\leqslant m\leqslant s}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=s\\ k_1\geqslant 1,\cdots,k_m\geqslant 1}}\frac{(-1)^m}{(2l)!(2k_1+1)!\cdots(2k_m+1)!}\quad (n=2,3,\cdots).$$

于是，

$$g(x)=\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s A_s x^{2s}+\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{x^{2l}}{(2l)!}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n B_n x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}P_n x^{2n},$$

其中

$$P_1=-\left(A_1+\frac{1}{2}\right),\quad P_n=(-1)^n\left[A_n+\frac{2}{(2n)!}+B_n\right]\quad (n=2,3,\cdots).$$

因此，最后得知：当 $0<|x|<\pi$ 时，有

$$f(x)=\frac{1}{x}g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}P_n x^{2n-1}.$$

经计算可得前几项如下：

$$A_1=-\frac{1}{6},\quad A_2=\frac{7}{360},\quad A_3=-\frac{31}{15120};\quad B_2=-\frac{1}{12},\quad B_3=\frac{1}{360}.$$

从而得

$$P_1=-\frac{1}{3},\quad P_2=-\frac{1}{45},\quad P_3=-\frac{2}{945}.$$

因此有

$$f(x)=\cot x-\frac{1}{x}=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{45}x^3-\frac{2}{945}x^5-\cdots.$$

【2894】 设 $\sec x$ 的展开式写为以下形式：

$$\sec x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n}{(2n)!}x^{2n}.$$

求出系数 E_n（欧拉数）的递推公式.

解 在等式 $\sec x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{E_n}{(2n)!}x^{2n}$ 的两端同乘 $\cos x$，并注意 $\cos x$ 的展开式，就有

$$\begin{aligned}1&=\cos x\sum_{s=0}^{\infty}\frac{E_s}{(2s)!}x^{2s}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{E_s}{(2s)!}x^{2s}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s+k=n}(-1)^k x^{2(k+s)}\frac{E_s}{(2k)!(2s)!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{s+k=n}(-1)^k\frac{E_s}{(2k)!(2s)!}\right]x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}A_n x^{2n}.\end{aligned}$$

根据幂级数展开式的唯一性，就有 $A_0=E_0=1$，而 $A_n=0\ (n=1,2,\cdots)$，其中

$$A_n=\sum_{k+s=n}(-1)^k\frac{E_s}{(2k)!(2s)!}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{E_{n-k}}{(2k)!(2n-2k)!},$$

故得递推关系

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{E_{n-k}}{(2k)!(2n-2k)!}=0\quad (n=1,2,\cdots).$$

例如，已知 E_0，由上式令 $n=1$，即得 $E_1-E_0=0$，从而，$E_1=E_0=1$. 由 E_0,E_1，令 $n=2$，又可推出 $E_2,\cdots$，等等. 一般说来，由 $E_0,E_1,E_2,\cdots,E_{n-1}$，从上式可推出 E_n.

【2895】 把函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}}$ $(|x|<1)$ 展开成幂级数.

解 只要 $x^2+2|tx|<1$，函数 $f(x)$ 就有展开的可能性. 记 x^n 的系数为 $P_n(t)$，则

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}}=1+P_1(t)x+P_2(t)x^2+\cdots+P_n(t)x^n+\cdots.\tag{1}$$

下面我们只要确定 $P_n(t)$ 即可. 为此，对(1)式两端同时对 x 求导数，得

$$\frac{t-x}{(1-2tx+x^2)^{\frac{3}{2}}}=P_1(t)+2P_2(t)x+\cdots+nP_n(t)x^{n-1}+\cdots.$$

把上式与(1)式比较，易得

$$(1-2tx+x^2)(P_1+2P_2x+\cdots+nP_n\,x^{n-1}+\cdots)=(t-x)(1+P_1x+P_2x^2+\cdots+P_n\,x^n+\cdots).$$

比较上式两端 x 的同次幂的系数，得

$$P_1(t)=t,\quad 2P_2(t)-2tP_1(t)=tP_1(t)-1,\quad \cdots,$$
$$(n+1)P_{n+1}(t)-2ntP_n(t)+(n-1)P_{n-1}(t)=tP_n(t)-P_{n-1}(t).$$

由此得

$$P_1(t)=t,\quad P_2(t)=\frac{3t^2-1}{2},\quad \cdots,\quad P_{n+1}(t)=\frac{2n+1}{n+1}tP_n(t)-\frac{n}{n+1}P_{n-1}(t). \tag{2}$$

例如，取 $n=2$，则由 $P_1(t)$ 及 $P_2(t)$ 可推得

$$P_3(t)=\frac{5}{3}t\cdot\frac{3t^2-1}{2}-\frac{2}{3}t=\frac{5\cdot 3}{3\cdot 2}t^3-\frac{3}{2}t=\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!}\left[t^3-\frac{3\cdot 2}{2(2\cdot 3-1)}t\right].$$

一般说来，由(2)式用数学归纳法可递推得

$$P_n(t)=\frac{(2n-1)!!}{n!}\left[t^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}t^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}t^{n-4}-\cdots\right]\quad (n\geqslant 1,\text{勒让德多项式}).$$

【2896】 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. 写出函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{1-x}$的展开式.

解 $F(x)=\sum\limits_{n_1=0}^{\infty}a_{n_1}x^{n_1}\sum\limits_{n_2=0}^{\infty}x^{n_2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1\geqslant 0,\ n_2\geqslant 0}}a_{n_1}\right)x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\right)x^n\quad (|x|<1).$

【2897】 若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 有收敛半径 R_1，而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 有收敛半径 R_2，则级数：

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$； (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nb_nx^n$

的收敛半径 R 是怎样的？

提示 利用柯西—阿达马公式即可求得：(1)$R\geqslant\min(R_1,R_2)$. (2)$R\geqslant R_1R_2$.

解 (1)记 $A_n=a_n+b_n$，则有

$$\sqrt[n]{|A_n|}=\sqrt[n]{|a_n+b_n|}\leqslant\sqrt[n]{|a_n|+|b_n|}\leqslant\sqrt[n]{2\max(|a_n|,|b_n|)}$$
$$=\sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{\max(|a_n|,|b_n|)}=\sqrt[n]{2}\max(\sqrt[n]{|a_n|},\sqrt[n]{|b_n|}).$$

注意到$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{2}=1$，故有

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|A_n|}\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\{\sqrt[n]{2}\max(\sqrt[n]{|a_n|},\sqrt[n]{|b_n|})\}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\{\max(\sqrt[n]{|a_n|},\sqrt[n]{|b_n|})\}$$
$$=\max\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|},\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|b_n|}\}=\max\left(\frac{1}{R_1},\frac{1}{R_2}\right),$$

从而得 $R\geqslant\dfrac{1}{\max\left(\dfrac{1}{R_1},\dfrac{1}{R_2}\right)}=\min(R_1,R_2)$.

(2)记 $B_n=a_nb_n$，则有 $\sqrt[n]{|B_n|}=\sqrt[n]{|a_nb_n|}=\sqrt[n]{|a_n|}\sqrt[n]{|b_n|}$. 于是，

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|B_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\{\sqrt[n]{|a_n|}\sqrt[n]{|b_n|}\}\leqslant\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}\}\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|b_n|}\}$$
$$=\frac{1}{R_1}\,\frac{1}{R_2}=\frac{1}{R_1R_2},$$

故得 $R\geqslant R_1R_2$.

【2898】 设 $l=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ 和 $L=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. 证明：幂级数的收敛半径 R 满足下列不等式 $l\leqslant R\leqslant L$.

证 记 $l_1=\dfrac{1}{l}$，$L_1=\dfrac{1}{L}$. 注意 $l\geqslant 0$，$L\geqslant 0$. 若 $l=0$，则记 $l_1=+\infty$；若 $l=+\infty$，则记 $l_1=0$. 对 L 与 L_1 也作

同样规定. 易见 $L_1\leqslant l_1$. 任给 $\varepsilon>0$, 总可选 $\delta_1>0$, $\delta_2>0$, 使

$$\frac{1}{1+\delta_1}=1-\frac{\varepsilon}{2},\quad \frac{1}{1-\delta_2}=1+\frac{\varepsilon}{2}.$$

注意对 δ_1,δ_2 而言, 存在正整数 m, 使当 $n>m$ 时, 有

$$l(1-\delta_2)<\left|\frac{a_n}{a_n+1}\right|<L(1+\delta_1)\quad 或\quad \frac{1}{L}\cdot\frac{1}{1+\delta_1}<\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<\frac{1}{l}\cdot\frac{1}{1-\delta_2},$$

即当 $n>m$ 时, 有

$$L_1\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)<\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}<l_1\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

易见当 $n>m$ 时, 有

$$\frac{|a_n|}{|a_m|}=\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}\cdot\frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|}\cdots\frac{|a_{m+1}|}{|a_m|}<\left[l_1\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]^{n-m}$$

或

$$\frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{l_1}<\left(\frac{|a_m|}{l_1^m}\right)^{\frac{1}{n}}\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{1}$$

同理可得

$$\frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{L_1}>\left(\frac{|a_m|}{L_1^m}\right)^{\frac{1}{n}}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{2}$$

注意到若 $A>0$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{A}=1$, 故存在充分大的 $n_0(>m)$, 使当 $n\geqslant n_0$ 时, 有

$$\left(\frac{|a_m|}{l_1^m}\right)^{\frac{1}{n}}<1+\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1+\frac{\varepsilon}{2}}\quad 及\quad \left(\frac{|a_m|}{L_1^m}\right)^{\frac{1}{n}}>1-\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1-\frac{\varepsilon}{2}}. \tag{3}$$

将(3)式代入(1)式及(2)式, 即得

$$\frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{l_1}<1+\varepsilon\quad 及\quad \frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{L_1}>1-\varepsilon.$$

于是, 有 $L_1(1-\varepsilon)\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|a_n|^{\frac{1}{n}}\leqslant l_1(1+\varepsilon)$. 从而得

$$\frac{1}{l_1(1+\varepsilon)}\leqslant R\leqslant\frac{1}{L_1(1-\varepsilon)}{}^{*)}.\quad 即\quad \frac{l}{1+\varepsilon}\leqslant R\leqslant\frac{L}{1-\varepsilon}.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性知, 即得 $l\leqslant R\leqslant L$.

*) 若 $L_1=+\infty$, 即 $L=0$, 此时显然有 $R=0$(级数除 $x_0=0$ 点收敛以外, 对任一点 $x\neq x_0$ 均发散), 故可设 $L_1<+\infty$.

【2899】 证明: 若函数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 且 $|n!a_n|<M\quad(n=1,2,\cdots)$, 其中 M 是常数, 则:

(1) $f(x)$ 在任一点 a 无穷次可微; (2) 展开式 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\quad(|x|<+\infty)$ 成立.

证 (1) 由于 $|n!a_n|<M$, 故有

$$|a_n|<\frac{M}{n!}\qquad(n=1,2,\cdots).$$

设 $[-N,N]$ 是包含 x_0 的任一有限区间. 由于

$$|a_n(x-x_0)^n|<\frac{M}{n!}(2N)^n$$

及级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{M}{n!}(2N)^n$ 收敛, 故由魏尔斯特拉斯判别法知, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 在包含 x_0 的任意有限区间上一致收敛, 即其收敛半径 $R=+\infty$. 于是, 此级数在任一点 $a\in(-\infty,+\infty)$ 无穷次可微.

(2) 由(1)段已证可知级数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 在任何点无穷次可微, 故

$$f^{(m)}(x)=\sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1)a_n(x-x_0)^{n-m}=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{n!}{(n-m)!}a_n(x-x_0)^{n-m}\quad(m=1,2,\cdots).$$

今设$|x-a|<R$(R为任意固定的正数)，于是，

$$|x-x_0|\leqslant|x-a|+|a-x_0|<R+|a-x_0|=L,$$

故由假定知

$$|f^{(m)}(x)|\leqslant\sum_{n=m}^{\infty}\frac{n!}{(n-m)!}|a_n|L^{n-m}\leqslant\sum_{n=m}^{\infty}\frac{n!}{(n-m)!}\frac{M}{n!}L^{n-m}=M\sum_{s=0}^{\infty}\frac{L^s}{s!}=MP\quad(m=1,2,\cdots),$$

其中 $P=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{L^s}{s!}<+\infty$.

考虑余项 $R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ 的拉格朗日形式

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\quad(0<\theta<1).$$

于是，当$|x-a|<R$时，有

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{MP}{(n+1)!}R^{n+1}\quad(n=1,2,\cdots).$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}$收敛，故$\lim_{n\to\infty}\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}=0$，从而，$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$. 由此可知，当$|x-a|<R$时，展式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

成立. 再由 $R>0$ 的任意性即知，此展式对一切 $x(|x|<+\infty)$皆成立. 证毕.

【2900】 证明：若(1)$a_n\geqslant0$；(2)存在 $\lim_{x\to R-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S$，则 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n=S$.

证 首先，如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ 收敛，则根据阿贝尔定理可知，函数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在点 $x=R$ 处左连续. 因此，

$$\lim_{x\to R-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=f(R)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n=S.$$

其次，我们证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ 发散是不可能的. 采用反证法，引出矛盾. 事实上，根据 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n=+\infty$知，对于任取的正整数 $A>S$，总存在正整数 N，使有

$$\sum_{n=0}^{N}a_nR^n>A>S.$$

从而有

$$\lim_{x\to R-0}\sum_{n=0}^{N}a_n x^n=\sum_{n=0}^{N}a_nR^n>A>S.$$

注意到 $a_n\geqslant0$，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\geqslant\sum_{n=0}^{N}a_nx^n(x\geqslant0)$，即得

$$\lim_{x\to R-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n>A>S,$$

此与假设 $\lim_{x\to R-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S$ 相矛盾. 因此，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ 一定收敛. 从而，命题获证.

将下列函数展开成幂级数：

【2901】 $\int_0^x e^{-t^2}dt$.

解 $\int_0^x e^{-t^2}dt=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{n!}\right]dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}\quad(|x|<+\infty).$

【2902】 $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$.

解 $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}=\int_0^x \left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{4n}\right]dt=x+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right]$ $(|x|\leqslant 1)$.

【2903】 $\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$.

解 $\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n+1)!}\right]dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$ $(|x|<+\infty)$.

【2904】 $\int_0^x \frac{\arctan x}{x}dx$.

解 $\int_0^x \frac{\arctan x}{x}dx=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}\right]dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$ $(|x|\leqslant 1)$.

【2905】 $\int_0^x \frac{tdt}{\ln(1+t)}$ （写出四项）.

解 令 $0<|t|<1$，注意

$$\frac{1}{t}\ln(1+t)=\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}=1-\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{t^m}{m+1}=1-\xi,$$

其中 $\xi=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{t^m}{m+1}$. 容易判断交错级数

$$\xi=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{t^m}{m+1}$$

当 $|t|<1$ 时是收敛的，且其和有性质 $|\xi|<1$. 于是，有

$$\frac{1}{\frac{1}{t}\ln(1+t)}=\frac{1}{1-\xi}=\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n.$$

因而，当 $|x|<1$ 时，得

$$\int_0^x\frac{tdt}{\ln(1+t)}=\int_0^x\frac{dt}{\frac{1}{t}\ln(1+t)}=\int_0^x\frac{dt}{1-\xi}=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n\right)dt.$$

为求四项近似，取到 t^3 为止足够，有

$$\xi^0=1,\quad \xi^1=\frac{t}{2}-\frac{t^2}{3}+\frac{t^3}{4}-\cdots,\quad \xi^2=\frac{t^2}{4}-\frac{t^3}{3}+\cdots,\quad \xi^3=\frac{t^3}{8}-\cdots,$$

于是，$\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n=1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{12}+\frac{t^3}{24}-\cdots$. 从而，当 $|x|<1$ 时，得原积分的前四项为

$$\int_0^x\frac{tdt}{\ln(1+t)}=\int_0^x\left(1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{12}+\frac{t^3}{24}\right)dt+O(x^5)=x+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{36}+\frac{x^4}{96}+O(x^5).$$

运用逐项微分法计算下列级数的和：

【2906】 $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots$.

解题思路 令 $F(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots$. 在其收敛域 $(-1,1)$ 内逐项微分之，得

$$F'(x)=1+x^2+x^4+\cdots=\frac{1}{1-x^2}.$$

注意 $F(0)=0$，即得 $F(x)=\int_0^x F'(t)dt$ $(|x|<1)$.

解 设 $F(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots$. 在收敛域 $|x|<1$ 内逐项微分之，得

$$F'(x)=1+x^2+x^4+\cdots=\frac{1}{1-x^2}.$$

注意 $F(0)=0$，即得

$$F(x)=\int_0^x \frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \quad (|x|<1).$$

于是，当 $|x|<1$ 时，有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

【2907】 $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots$.

提示 仿 2906 题的解法.

解 设 $F(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots$. 在收敛域 $|x|\leqslant 1$ 内逐项微分之，得

$$F'(x)=1-x^2+x^4-\cdots=\frac{1}{1+x^2}.$$

注意 $F(0)=0$，即得

$$F(x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}=\arctan x.$$

于是，当 $|x|\leqslant 1$ 时，有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\arctan x$.

【2908】 $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$.

提示 令 $F(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$，将 $F(x)-F'(x)$ 与 $F(x)+F'(x)$ 相加即获解.

解 设 $F(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$. 在收敛域 $|x|<+\infty$ 内逐项微分之，得

$$F'(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots.$$

于是，有

$$F(x)-F'(x)=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots=e^{-x}, \tag{1}$$

$$F(x)+F'(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=e^x. \tag{2}$$

将(1)式和(2)式相加，最后得 $F(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\operatorname{ch}x \quad (|x|<+\infty)$.

【2909】 $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\cdots$.

解 设 $F(x)=\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\cdots$. 在收敛域 $|x|\leqslant 1$ 内逐项微分之，得

$$F'(x)=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{4}+\cdots=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots\right)$$

$$=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}[-\ln(1-x)] \quad (0<|x|<1).$$

注意 $F(0)=0$，即得

$$F(x)=\int_0^x F'(t)dt=1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x) \quad (0<|x|<1).$$

当 $x=0$ 时，级数收敛于零. 当 $x=1$ 时，级数收敛于 1. 当$x=-1$时，级数收敛于 $1-2\ln 2$. 事实上，

$$-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots=-\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots$$

$$=2\left(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdots\right)+1=1-2\ln 2.$$

于是，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\begin{cases}1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x), & 0<|x|<1,\\ 0, & x=0,\\ 1-2\ln2, & x=-1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

【2910】 $1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\cdots$.

解 设 $F(x)=1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\cdots$. 在收敛域内逐项微分之，得

$$F'(x)=\frac{1}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}2x+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}3x^2+\cdots.$$

以 $1-x$ 乘上式两端，得

$$(1-x)F'(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\cdots=\frac{1}{2}F(x).$$

即 $\frac{F'(x)}{F(x)}=\frac{1}{2(1-x)}$. 积分得 $\ln F(x)=\ln\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ 或

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+1=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\quad(|x|<1).$$

当 $x=1$ 时，应用拉比判别法：$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\frac{n}{2n+1}\to\frac{1}{2}<1$，因此，级数是发散的.

当 $x=-1$ 时，利用 2689 题的结果知，级数条件收敛. 于是，$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ $(-1\leqslant x<1)$.

运用逐项积分法计算下列级数的和：

【2911】 $x+2x^2+3x^3+\cdots$.

提示 令 $F(x)=x+2x^2+3x^3+\cdots$，注意 $\int_0^x F(t)\mathrm{d}t=\frac{x}{1-x}+\ln(1-x)$ $(|x|<1)$.

解 设 $F(x)=x+2x^2+3x^3+\cdots$. 在收敛域内逐项积分之，得

$$\begin{aligned}\int_0^x F(t)\mathrm{d}t&=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{4}x^4+\cdots\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1-\frac{1}{3}\right)x^3+\left(1-\frac{1}{4}\right)x^4+\cdots\\&=(x^2+x^3+x^4+\cdots)-\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\cdots\right)\\&=x(1+x+x^2+\cdots)-\left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots\right)=\frac{x}{1-x}+\ln(1-x)\quad(|x|<1).\end{aligned}$$

于是，

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\left[\frac{x}{1-x}+\ln(1-x)\right]'=\frac{x}{(1-x)^2}\quad(|x|<1).$$

当 $|x|=1$ 时，由于级数的通项不趋于零，故它是发散的.

【2912】 $x-4x^2+9x^3-16x^4+\cdots$.

提示 令 $F(x)=x-4x^2+9x^3-16x^4+\cdots$，注意 $\int_0^x F(x)\mathrm{d}x=x-\ln(1+x)-\frac{x^3}{(1+x)^2}$ $(|x|<1)$.

解 设 $F(x)=x-4x^2+9x^3-16x^4+\cdots$. 在收敛域内逐项积分之，得

$$\begin{aligned}\int_0^x F(t)\mathrm{d}t&=\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{3}x^3+\frac{9}{4}x^4-\frac{16}{5}x^5+\cdots\\&=\frac{1}{2}x^2-\left(1+\frac{1}{3}\right)x^3+\left(2+\frac{1}{4}\right)x^4-\left(3+\frac{1}{5}\right)x^5+\cdots\end{aligned}$$

$$=x+\left(-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\cdots\right)-x^3(1-2x+3x^2-\cdots)$$

$$=x-\ln(1+x)-x^3(x-x^2+x^3-\cdots)'$$

$$=x-\ln(1+x)-x^3\left(\frac{x}{1+x}\right)'=x-\ln(1+x)-\frac{x^3}{(1+x)^2}\quad(|x|<1).$$

于是,

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n=\left[x-\ln(1+x)-\frac{x^3}{(1+x)^2}\right]'=\frac{x(1-x)}{(1+x)^3}\qquad(|x|<1).$$

当$|x|=1$时,级数显然发散.

【2913】 $1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+\cdots$.

提示 利用 2911 题的结果.

解 设$F(x)=1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+\cdots$.在收敛域内逐项积分之,得

$$\int_0^x F(t)\mathrm{d}t=x^2+2x^3+3x^4+\cdots=x(x+2x^2+3x^3+\cdots)=x\cdot\frac{x}{(1-x)^2}{}^{*)}=\frac{x^2}{(1-x)^2}\quad(|x|<1).$$

于是,

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n(n+1)x^n=\left[\frac{x^2}{(1-x)^2}\right]'=\frac{2x}{(1-x)^3}\quad(|x|<1).$$

当$|x|=1$时,级数显然发散.

*) 利用 2911 题的结果.

【2914】 证明:级数 $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$满足方程 $y^{(4)}=y$.

证 所给级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$.在收敛域内逐项微分之,得

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!},\quad y''=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!},\quad y'''=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!},\quad y^{(4)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!}.$$

于是,$y^{(4)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}=y$.

【2915】 证明:级数 $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$满足方程 $xy''+y'-y=0$.

证 所给级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$.在收敛域内逐项微分之,得

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!(n+1)!},\quad y''=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!(n+1)!}.$$

于是,

$$xy''+y'=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-1)!(n+1)!}+\frac{1}{n!(n+1)!}\right]x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}=y,$$

从而得 $xy''+y'-y=0$.

求在复数域内($z=x+\mathrm{i}y$)下列幂级数的收敛半径及收敛圆:

【2916】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1-\mathrm{i})^n}{n\cdot 2^n}$.

解 记$c_n=\frac{1}{n\cdot 2^n}$.由于$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=2$,故收敛半径$R=2$;收敛圆为$|z-1-\mathrm{i}|<2$即

$$(x-1)^2+(y-1)^2<2^2.$$

【2917】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\mathrm{i})^n z^n}{(n+1)(n+2)}$.

解 记$c_n=\frac{(1+\mathrm{i})^n}{n(n+1)}$.由于$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\frac{1}{|1+\mathrm{i}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$,故收敛半径$R=\frac{1}{\sqrt{2}}$;收敛圆为$|z|<\frac{1}{\sqrt{2}}$即

$$x^2+y^2<\frac{1}{2}.$$

【2918】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\ z^n}{(1+i)(1+2i)\cdots(1+ni)}$.

解 记 $c_n=\frac{n!}{(1+i)(1+2i)\cdots(1+ni)}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|1+(n+1)i|}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+(n+1)^2}}{n+1}=1,$$

故收敛半径 $R=1$；收敛圆为 $|z|<1$ 即 $x^2+y^2<1$.

【2919】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^{\alpha+i\beta}}$.

解 记 $c_n=\frac{1}{n^{\alpha+i\beta}}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha+i\beta}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha}=1,$$

故收敛半径 $R=1$；收敛圆为 $|z|<1$ 即 $x^2+y^2<1$.

【2920】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-e^{i\alpha})^n}{n(1-e^{i\alpha})^n}$.

解 记 $c_n=\frac{1}{n(1-e^{i\alpha})^n}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}(1-e^{i\alpha})\right|=|1-(\cos\alpha+i\ \sin\alpha)|=\sqrt{(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}=\left|2\sin\frac{\alpha}{2}\right|,$$

故收敛半径 $R=\left|2\sin\frac{\alpha}{2}\right|$；收敛圆为 $|z-e^{i\alpha}|<\left|2\sin\frac{\alpha}{2}\right|$，即 $(x-\cos\alpha)^2+(y-\sin\alpha)^2<4\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

【2921】 利用牛顿二项式公式，近似地计算 $\sqrt[3]{9}$，并且估计当只取展开式的头三项时的误差.

解 $\sqrt[3]{9}=2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}=2\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8^2}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{8^3}-\cdots\right)$.

当只取展开式的头三项时，误差

$$|R_3|<2\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{2\cdot5}{3^3}\cdot\frac{1}{8^3}=\frac{10}{3^4\cdot8^3}<0.001.$$

计算头三项，每一项取到小数点后四位，即得

$$\sqrt[3]{9}\approx2\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{2!}\cdot\frac{2}{3^2}\cdot\frac{1}{8^2}\right)\approx2.080.$$

【2922】 近似地计算并估计相应误差：

(1) $\arctan1.2$； (2) $\sqrt[10]{1000}$； (3) $\frac{1}{\sqrt{e}}$； (4) $\ln1.25$. .

解 (1) 利用 $\arctan x+\arctan y=\arctan\frac{x+y}{1-xy}$，并设 $x=1$，$\frac{x+y}{1-xy}=1.2$，即得 $y=\frac{1}{11}$. 于是，

$$\arctan1.2=\arctan1+\arctan\frac{1}{11}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{11}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{11}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{11}\right)^5-\cdots.$$

若取头三项*)，则其误差 $|R_3|<\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{11}\right)^5<10^{-5}$. 计算头三项，每一项取到小数点后六位，即得

$$\arctan1.2\approx0.87606.$$

(2) $\sqrt[10]{1000}=\sqrt[10]{1024-24}\approx2(1-0.024)^{\frac{1}{10}}=2\left[1-\frac{0.024}{10}+\frac{\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}-1\right)}{2!}(0.024)^2-\cdots\right]$.

若取头三项，注意到上述级数的各项递减，故其误差

$$|R_3|<2\cdot\frac{\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}-1\right)\left(\frac{1}{10}-2\right)}{3!}(0.024)^3\cdot[1+0.024+(0.024)^2+\cdots]<10^{-6}.$$

计算头三项，每一项取到小数点后七位，即得 $\sqrt[10]{1000}\approx1.995263$.

(3) $\frac{1}{\sqrt{e}}=e^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{2^4}-\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{1}{6!}\cdot\frac{1}{2^6}-\cdots$.

若取头七项,则其误差$|R_7|<\frac{1}{7!\ 2^7}<10^{-5}$.计算头七项,每一项取到小数点后六位,即得$\frac{1}{\sqrt{e}}\approx 0.60653$.

(4) $\ln 1.25=\ln\left(1+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2\cdot 4^2}+\frac{1}{3\cdot 4^3}-\frac{1}{4\cdot 4^4}+\frac{1}{5\cdot 4^5}-\frac{1}{6\cdot 4^6}+\cdots$.

若取头六项,则其误差$|R_6|<\frac{1}{7\cdot 4^7}<10^{-5}$.计算头六项,每一项取到小数点后六位,即得 $\ln 1.25\approx 0.22314$.

*) 本题并未注明取多少项以估计误差,因此,我们可任意选取.各小题均类似处理.

利用适当的展开式,计算下列函数精确到所指出的程度的值.

【2923】 $\sin 18°$,精确到 10^{-5}.

解 $\sin 18°=\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{10}-\frac{\pi}{3!10^3}+\frac{\pi}{5!10^5}-\cdots$ 上述级数为交错级数,若取头 n 项,则其误差

$$\Delta<\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^{2n+1}.$$

要使 $\Delta<10^{-5}$,只要$\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^{2n+1}<10^{-5}$,以 $n=3$ 代入上式即满足($n=2$ 达不到要求的精确程度).计算头三项,每一项取到小数点后六位,即得 $\sin 18°\approx 0.30902$.

【2924】 $\cos 1°$,精确到 10^{-6}.

解 $\cos 1°=\cos\frac{\pi}{180}=1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^4-\cdots$.

取 $n=2$,即可保证 $\Delta<\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^4<10^{-6}$.计算得 $\cos 1°\approx 0.999848$.

【2925】 $\tan 9°$,精确到 10^{-3}.

解 $\tan 9°=\tan\frac{\pi}{20}=\frac{\pi}{20}+\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{20}\right)^3+\frac{2}{15}\left(\frac{\pi}{20}\right)^5+\cdots$ *)

若取头二项,考虑到上述级数的各项递减,则其误差

$$\Delta<\frac{2}{15}\left(\frac{\pi}{20}\right)^5\left[1+\left(\frac{\pi}{20}\right)^2+\left(\frac{\pi}{20}\right)^4+\cdots\right]<10^{-3}.$$

取两项计算,每一项取到小数点后四位,计算得 $\mathrm{tg}9°\approx 0.158$.

*) 利用 2891 题的结果.

【2926】 e,精确到 10^{-6}.

解 $e=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}$.若取 $1+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m!}$作为 e 的近似值,则其误差

$$\Delta=\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m!}=\frac{1}{n!}\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdots m}<\frac{1}{n!}\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{m-n}}=\frac{1}{n!n}.$$

要 $\Delta<10^{-6}$,只要$\frac{1}{n!n}<10^{-6}$,也即只要 $n!n>10^6$.取 $n=9$ 即可.于是,当每项取到小数点后七位,即得

$$e\approx 1+\sum_{n=1}^{9}\frac{1}{n!}\approx 2.718282.$$

【2927】 $\ln 1.2$,精确到 10^{-4}.

解 $\ln 1.2=\ln(1+0.2)=0.2-\frac{1}{2}(0.2)^2+\frac{1}{3}(0.2)^3-\frac{1}{4}(0.2)^4+\cdots$.

若取头 n 项,则其误差 $\Delta<\frac{1}{n+1}(0.2)^{n+1}$.要 $\Delta<10^{-4}$,只要$\frac{1}{n+1}(0.2)^{n+1}<10^{-4}$.取 $n=4$ 即可保证 $\Delta<\frac{1}{5}(0.2)^5<10^{-4}$.于是,当每项取到小数点后五位,即得

$$\ln 1.2\approx 0.2-\frac{1}{2}(0.2)^2+\frac{1}{3}(0.2)^3-\frac{1}{4}(0.2)^4\approx 0.1823.$$

【2928】 由等式$\frac{\pi}{6}=\arcsin\frac{1}{2}$求数 π，精确到 10^{-4}.

解 $\pi=6\arcsin\frac{1}{2}$

$$=6\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^9\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\cdot\frac{1}{11}\left(\frac{1}{2}\right)^{11}+\cdots\right].$$

若取头六项，考虑到上述级数的各项递减，则其误差

$$\Delta<6\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}\cdot\frac{1}{13}\left(\frac{1}{2}\right)^{13}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots\right]<10^{-4}.$$

取头六项计算，每一项取到小数点后五位，即得 $\pi\approx 3.1416$.

【2929】 利用等式$\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}$计算数 π，精确到 0.001.

解 按题设，有

$$\frac{\pi}{4}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^7}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9}-\cdots\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}+\cdots\right).$$

注意到等式右端的两个级数都是莱布尼茨型的，故在被加数与加数中，弃去未写出项的校正数分别为

$$0<\Delta_1<\frac{4}{11\cdot 2^{11}}<0.0002,\quad 0<\Delta_2<\frac{4}{9\cdot 3^9}<0.00002,$$

于是，总误差 $\Delta\leqslant\Delta_1+\Delta_2<0.001$. 计算保留下来的项近似到小数点后四位（末位由四舍五入而得），即可保证达到所需误差，列成下表（括号中的正、负号指示校正数的符号）：

正　项	负　项
$\frac{4}{2}=2.0000$	$\frac{4}{3\cdot 2^3}=0.1667(-)$
$\frac{4}{5\cdot 2^5}=0.0250$	$\frac{4}{7\cdot 2^7}=0.0045(-)$
$\frac{4}{9\cdot 2^9}=0.0009(-)$	$\frac{4}{3\cdot 3^3}=0.0494(-)$
$\frac{4}{3}=1.3333(+)$	$+)\ \frac{4}{7\cdot 3^7}=0.0003(-)$
$+)\ \frac{4}{5\cdot 3^5}=0.0033(-)$	0.2209
3.3625	
$-)$0.2209	
3.1416	

于是，$3.1415<\pi<3.1420$. 因此，取 $\pi\approx 3.142$ 即可精确到 0.001.

【2930】 利用等式

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}$$

求数 π，精确到 10^{-9}.

解 在此，我们证明一下 2929 题及本题中的等式. 如果注意到反正切函数的加法公式

$$\arctan x+\arctan y=\arctan\frac{x+y}{1-xy}\quad\left(|x+y|<\frac{\pi}{2}\right),$$

并选取任何两个满足关系式$\frac{x+y}{1-xy}=1$ 或 $(1+x)(1+y)=2$ 的真分数作为 x,y，就有

$$\frac{\pi}{4}=\arctan x+\arctan y.$$

例如，令 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{3}$，即得 $\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}$. 这就是 2929 题中所出现的等式.

如果令 $x=\frac{1}{5}$，$\arctan\frac{1}{5}=\alpha$，则

$$\tan\alpha=\frac{1}{5},\quad \tan2\alpha=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}=\frac{5}{12},\quad \tan4\alpha=\frac{\frac{10}{12}}{1-\frac{25}{144}}=\frac{120}{119}\approx1.$$

可见，$4\alpha\approx\frac{\pi}{4}$.

令 $\beta=4\alpha-\frac{\pi}{4}$，则 $\tan\beta=\frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}}=\frac{1}{239}$. 于是，$\beta=\arctan\frac{1}{239}$. 由此，得

$$\frac{\pi}{4}=4\alpha-\beta=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}$$

或

$$\pi=16\arctan\frac{1}{5}-4\arctan\frac{1}{239}$$
$$=16\left\{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^7}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5^9}-\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{5^{11}}+\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{5^{13}}-\cdots\right\}-4\left\{\frac{1}{239}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{239^3}+\cdots\right\}.$$

这就是本题中所出现的等式，它就是著名的马信(J. Machin)公式.

我们要依靠此式计算 π，精确到 10^{-9}，只要上面已写出的那些项就够了. 事实上，这两个级数都是来布尼茨型的，所以在被减数与减数中，弃去了未写出的项的校正数分别为

$$0<\Delta_1<\frac{16}{15\cdot5^{15}}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^9}\quad 与\quad 0<\Delta_2<\frac{4}{5\cdot239^5}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^9},$$

于是，总误差 $\Delta\leqslant\Delta_1+\Delta_2<\frac{1}{10^9}$. 计算保留下来的项近似到小数点后十位，列成下表(括号中的±号指示校正数的符号)：

$$\frac{16}{5}=3.2000000000$$
$$\frac{16}{5\cdot5^5}=0.0010240000$$
$$\frac{16}{9\cdot5^9}=0.0000009102(+)$$
$$+)\ \frac{16}{13\cdot5^{13}}=0.0000000010(+)$$

$$3.2010249112$$
$$-)\ 0.0426959536$$
$$3.1583289576$$

$$\frac{16}{3\cdot5^3}=0.0426666667(-)$$
$$\frac{16}{7\cdot5^7}=0.0000292571(+)$$
$$+)\ \frac{16}{11\cdot5^{11}}=0.0000000298(-)$$

$$0.0426959536$$

$$\frac{4}{239}=0.0167364017(-)$$
$$-)\ \frac{4}{3\cdot239^3}=0.0000000977(+)$$

$$0.0167363040.$$

于是，

$$3.1583289576<16\alpha<3.1583289577,\qquad -0.0167363040=-4\beta=-0.0167363040;$$

$$\pi=16\alpha-4\beta,\qquad 3.1415926536<\pi<3.1415926537.$$

因此，取 $\pi\approx3.141592654$ 可精确到 10^{-9}，并且可知：如取 $\pi\approx3.141592653\cdots$ 所有写出的数字都是正确的.

【2931】 利用公式 $\ln(n+1)=\ln n+2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\cdots\right]$ 求 ln2 和 ln3，精确到 10^{-5}.

解 当 $n=1$ 时，$\ln2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot3^3}+\frac{1}{5\cdot3^5}+\frac{1}{7\cdot3^7}+\frac{1}{9\cdot3^9}+\cdots\right)$.

如取已写出的那些项计算 ln2，即知

$$0<\Delta<2\left(\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3^{11}}+\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{3^{13}}+\cdots\right)<\frac{2}{11\cdot3^{11}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3^2}}<\frac{2}{10^6}.$$

计算到小数点后六位，并作出下表：

$$\frac{2}{3}=0.666667(-)$$

$$\frac{2}{3\cdot3^3}=0.024691(+)$$

$$\frac{2}{5\cdot3^5}=0.001646(+)$$

$$\frac{2}{7\cdot3^7}=0.000131(-)$$

$$+)\ \frac{2}{9\cdot3^9}=0.000011(+)$$

$$\overline{\qquad\qquad 0.693146}$$

故 $0.693146<\ln2<0.693148$.

于是，$\ln2=0.69314\cdots$，并且所有写出来的五位数字都是正确的. 如果，将第六位四舍五入，即得 $\ln2\approx0.69315$，精确到 10^{-5}.

令 $n=2$，即得

$$\ln3=\ln2+2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3\cdot5^3}+\frac{1}{5\cdot5^5}+\frac{1}{7\cdot5^7}+\frac{1}{9\cdot5^9}\right)+\cdots.\tag{1}$$

与 ln2 一样，取写出的诸项，计算到小数点后六位，并作出下表：

$$\frac{2}{5}=0.400000$$

$$\frac{2}{3\cdot5^3}=0.005333(+)$$

$$\frac{2}{5\cdot5^5}=0.000128$$

$$\frac{2}{7\cdot5^7}=0.000004(-)$$

$$+)\ \frac{2}{9\cdot5^9}=0.000000(+)$$

$$\overline{\qquad\qquad 0.405465}$$

于是，(1)式右端的级数的和为 $0.40546\cdots$，并且写出来的五位数字都是正确的. 如将第六位四舍五入，可得 0.40547.

最后，由(1)式得

$$\ln3\approx0.693146\cdots+0.405465\cdots=1.09861\cdots,$$

并且所有写出来的数字都是正确的.

如果将第六位四舍五入，即得 $\ln3\approx0.69315+0.40546=1.09861$，它精确到 10^{-5}.

【2932】 将被积函数展开成级数，从而计算下列积分之值，精确到 0.001：

(1) $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$；　(2) $\int_2^4 e^{\frac{1}{x}}\,dx$；　(3) $\int_0^2 \frac{\sin x}{x}dx$；

(4) $\int_0^1 \cos x^2 \mathrm{d}x$；　　(5) $\int_0^1 \frac{\mathrm{sh}x}{x}\mathrm{d}x$；　　(6) $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$；

(7) $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1-x^2}}$；　　(8) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}$；　　(9) $\int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x$；

(10) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x$；　　(11) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{x}\mathrm{d}x$；　　(12) $\int_0^1 x^x \mathrm{d}x$.

解 (1)
$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\cdots\right)\mathrm{d}x$$
$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5\cdot 2!}-\frac{1}{7\cdot 3!}+\frac{1}{9\cdot 4!}-\cdots,$$

如取写出来的诸项，计算到小数点后四位，并作出下表：

$$\begin{array}{r}
1 = 1.0000 \\
\frac{1}{5\cdot 2!} = 0.1000 \\
+)\ \frac{1}{9\cdot 4!} = 0.0046(+) \\
\hline
1.1046 \\
-)\ 0.3571 \\
\hline
0.7475 \\
\\
\frac{1}{3} = 0.3333(+) \\
+)\ \frac{1}{7\cdot 3!} = 0.0238(+) \\
\hline
0.3571
\end{array}$$

于是，$0.7473<\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x<0.7476$，即有 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\approx 0.747$，精确到 0.001，并且所有写出来的数字都是正确的.

(2) $\int_2^4 \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x = \int_2^4 \left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2!x^2}+\frac{1}{3!x^3}+\frac{1}{4!x^4}+\cdots\right)\mathrm{d}x = 2+\ln 2+\frac{1}{2!\cdot 4}+\frac{3}{3!\cdot 32}+\frac{7}{4!\cdot 192}+\cdots$

$$=2+0.\overset{(+)}{6}931+0.1250+0.015\overset{(+)}{6}+0.001\overset{(+)}{5}+\cdots\approx 2.8352\quad (0<\Delta<0.001).$$

于是，$\int_2^4 \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x\approx 2.835$，精确到 0.001.

(3) $\int_0^2 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^2 \frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right)\mathrm{d}x=2-\frac{2^3}{3\cdot 3!}+\frac{2^5}{5\cdot 5!}-\frac{2^7}{7\cdot 7!}+\cdots,$

如取写出来的诸项计算积分值，则其误差 $0<\Delta<\frac{2^9}{9\cdot 9!}<\frac{1}{10^3}$. 列下表：

$$\begin{array}{r}
2 = 2.0000 \\
+)\ \frac{2^5}{5\cdot 5!} = 0.0533(+) \\
\hline
2.0533 \\
-)\ 0.4480 \\
\hline
1.6053 \\
\\
\frac{2^3}{3\cdot 3!} = 0.4444(+) \\
+)\ \frac{2^7}{7\cdot 7!} = 0.0036(+) \\
\hline
0.4480
\end{array}$$

于是，$1.6051<\int_0^2 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x<1.6054$，即 $\int_0^2 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\approx 1.605$，并且所有写出的数字都是正确的.

(4) $\int_0^1 \cos x^2 \mathrm{d}x=\int_0^1 \left(1-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^8}{4!}-\cdots\right)\mathrm{d}x=1-\frac{1}{5\cdot 2!}+\frac{1}{9\cdot 4!}-\cdots,$

如取写出的诸项计算积分值，则其误差 $0<\Delta<\frac{1}{13\cdot 6!}<\frac{1}{10^3}$. 列下表：

$$\begin{array}{r} 1 \ =1.0000 \\ +)\dfrac{1}{9\cdot 4!}=0.0046(+) \\ \hline 1.0046 \\ -)\ 0.1000 \\ \hline 0.9046 \end{array}$$

$$\frac{1}{5\cdot 2!}=0.1000$$

所以，$\int_0^1 \cos x^2 \mathrm{d}x\approx 0.9046$. 于是，$\int_0^1 \cos x^2 \mathrm{d}x\approx 0.905$，精确到 0.001.

(5) $\int_0^1 \frac{\mathrm{sh}x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{1}{x}\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)\mathrm{d}x=1+\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}+\cdots$,

如取写出来的诸项计算积分值，则其误差

$$0<\Delta<\frac{1}{7\cdot 7!}\left(1+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^4}+\cdots\right)=\frac{1}{7\cdot 7!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{7^2}}<10^{-3}.$$

列下表：

$$\begin{array}{r} 1 \ =1.0000 \\ \dfrac{1}{3\cdot 3!}=0.0556(-) \\ +)\dfrac{1}{5\cdot 5!}=0.0017(+) \\ \hline 1.0573 \end{array}$$

于是，$\int_0^1 \frac{\mathrm{sh}x}{x}\mathrm{d}x\approx 1.057$，精确到 0.001.

(6) 当 $x\geqslant 2$ 时，

$$\frac{1}{1+x^3}=\frac{1}{x^3}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^3}=\left(\frac{1}{x}\right)^3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{x}\right)^{3n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{x}\right)^{3n+3},$$

于是，

$$I=\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_2^{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{3n+3}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+2}\left(\frac{1}{2}\right)^{3n+2}$$

$$=\frac{1}{8}-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^8-\frac{1}{11}\left(\frac{1}{2}\right)^{11}+\cdots.$$

取前两项的近似值就有 $I=0.119+\theta\quad(0<\theta<0.001)$. 或者用直接积分法：

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}=\int_2^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+x}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x-2}{x^2-x+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Bigg|_2^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{6}\ln 3-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{6}\ln 3\approx 0.119,$$

精确到 0.001.

(7) $\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{3}}=1+\frac{x^2}{3}+\frac{4x^4}{3^2\cdot 2!}+\cdots$,

故得 $\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1-x^2}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^5}+\cdots\approx 0.337$，精确到 0.001.

(8) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}=\int_0^1(1+x^4)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(1-\frac{1}{2}x^4+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^8+\cdots\right)\mathrm{d}x$

$$=1-\frac{1}{5\cdot 2}+\frac{1\cdot 3}{9\cdot 2^2\cdot 2!}-\cdots-\frac{1\cdot 3\cdots 45}{93\cdot 2^{23}\cdot 23!}+\cdots$$

$=(1.0000+0.0417+0.0160+0.0090+0.0060+0.0043+0.0033+0.0026+0.0022+0.0018+0.0014+0.0012)-(0.1000+0.0240+0.0117+0.0072+0.0050+0.0037+0.0029+0.0024+0.0020+0.0016+0.0013+0.0010)+\cdots$

$\approx 0.927.$

$$0<\Delta<\frac{1\cdot 3\cdots 47}{97\cdot 2^{24}\cdot 24!}<10^{-3}.$$

(9) 注意，当 $10\leqslant x\leqslant 100$ 时，有

$$\ln(1+x)=\ln\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{1}{x}\right)^n,$$

于是，得

$$I=\int_{10}^{100}\frac{\ln(1+x)}{x}dx=\int_{10}^{100}\frac{\ln x}{x}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\int_{10}^{100}x^{-n-1}dx$$

$$=\frac{3}{2}\ln^2 10+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cdot\frac{1}{10^n}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\ln^2 10+\frac{1}{10}\left(1-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{4\cdot 10^2}\left(1-\frac{1}{10^2}\right)+\frac{1}{9\cdot 10^3}\left(1-\frac{1}{10^3}\right)+\cdots$$

≈ 8.041 （精确到 0.001）.

(10) $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\arctan x}{x}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\right)dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{3^2\cdot 2^3}+\frac{1}{5^2\cdot 2^5}-\frac{1}{7^2\cdot 2^7}+\cdots,$

如取前三项计算积分值，则其误差 $0<\Delta<\frac{1}{7^2\cdot 2^7}<\frac{1}{10^3}$. 于是，$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\arctan x}{x}dx\approx 0.488$ （精确到 0.001）.

(11) $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\arcsin x}{x}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x}\left(x+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5}+\cdots\right)dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4\cdot 3^2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5^2\cdot 2^5}+\cdots,$

如取前三项计算积分值，则其误差

$$0<\Delta<\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7^2}\cdot\frac{1}{2^7}\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots\right)<\frac{1}{7^2\cdot 2^7}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2^2}}<\frac{1}{10^3}.$$

于是，$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\arcsin x}{x}dx\approx 0.507$ （精确到 0.001）.

(12) 注意到

$$x^x=e^{x\ln x}=1+x\ln x+\frac{(x\ln x)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x\ln x)^n}{n!}+\cdots,$$

并有 $\int_0^1 x^n\ln^n x\,dx=(-1)^n\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$ *）. 于是，

$$\int_0^1 x^x dx=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{27}-\frac{1}{256}+\cdots,$$

如取前四项计算积分值，则其误差

$$0<\Delta<\frac{4!}{4!\cdot(4+1)^{4+1}}=\frac{1}{5^5}<\frac{1}{10^3},$$

故 $\int_0^1 x^x dx\approx 0.783$（精确到 0.001）.

*） 参看 2286 题，$m=n$.

【2933】 求一段正弦曲线 $y=\sin x$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$之弧长，并精确到 0.01.

解 弧长 s 为

$$s=\int_0^{\pi}\sqrt{1+y'^2}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\cos^2 x-\frac{1}{2!\cdot 2^2}\cos^4 x+\frac{1\cdot 3}{3!\cdot 2^3}\cos^6 x-\cdots\right)dx.$$

注意到 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}x\,dx=\frac{\pi(2n)!}{2^{2n+1}\cdot n!\cdot n!}$ *），即有

$$s=2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\cdot 2!}{2^4}-\frac{1}{2!2^2}\cdot\frac{\pi\cdot 4!}{2^5\cdot 2!2!}+\frac{1\cdot 3}{3!2^3}\cdot\frac{\pi\cdot 6!}{2^7\cdot 3!3!}-\cdots\right)=\pi\left(1+\frac{1}{4}-\frac{3}{64}+\frac{5}{256}-\cdots\right),$$

如取写出的诸项计算 s 值，则其误差

$$0<\Delta<\frac{3\cdot 5\cdot 2\pi}{4!2^4}\cdot\frac{8!}{2^9\cdot 4!4!}<\frac{1}{10^2}.$$

于是，$s\approx 3.14(1+0.25-0.05+0.02)\approx 3.83$.

*） 利用 2290 题的结果，$m=0$.

【2934】 椭圆之半轴为 $a=1$ 及 $b=\frac{1}{2}$，求椭圆的弧长，并精确到 0.01.

解 椭圆的参数方程为 $x=a\sin t$，$y=b\cos t$. 于是，

$$ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}\,dt=a\cdot\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\,dt,$$

其中 $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ 为椭圆的离心率，从而得

$$\begin{aligned}s&=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\,dt\\&=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\sin^2 t-\frac{1}{2!2^2}\varepsilon^4\sin^4 t-\frac{1\cdot 3}{3!\cdot 2^3}\varepsilon^6\sin^6 t-\cdots\right)dt\\&=4a\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\varepsilon^2\cdot\frac{\pi\cdot 2!}{2^3}-\frac{1}{2!\,2^2}\varepsilon^4\cdot\frac{\pi\cdot 4!}{2^5\cdot 2!2!}-\frac{1\cdot 3}{3!\,2^3}\varepsilon^6\cdot\frac{\pi\cdot 6!}{2^7\cdot 3!3!}-\cdots\right)\end{aligned}$$

如取写出的前五项计算 s 值，则其误差 $0<\Delta<10^{-2}$. 再以 a,b 值代入，即得

$$\begin{aligned}s&=2\pi\left(1-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}-\frac{3}{64}\cdot\frac{9}{16}-\frac{5}{256}\cdot\frac{27}{64}-\frac{5\cdot 27\cdot 3}{256\cdot 64\cdot 4}-\cdots\right)\\&\approx 2\pi(1-0.188-0.026-0.008-0.003-\cdots)\approx 4.84.\end{aligned}$$

【2935】 两根电线杆相距 $2l=20$m，电线成抛物线的形状. 若电线下垂高度 $h=40$cm，计算电线的长度，并精确到 1cm.

解 先建立抛物线 AOB 的方程.

取坐标系如图 5.2 所示，则方程的标准形式为 $x^2=2py$.

由于此抛物线过点 $B(10,0.4)$，所以，

$$10^2=2p(0.4),\quad p=125,$$

即 $y=\frac{1}{250}x^2$. 于是，所求的电线长为

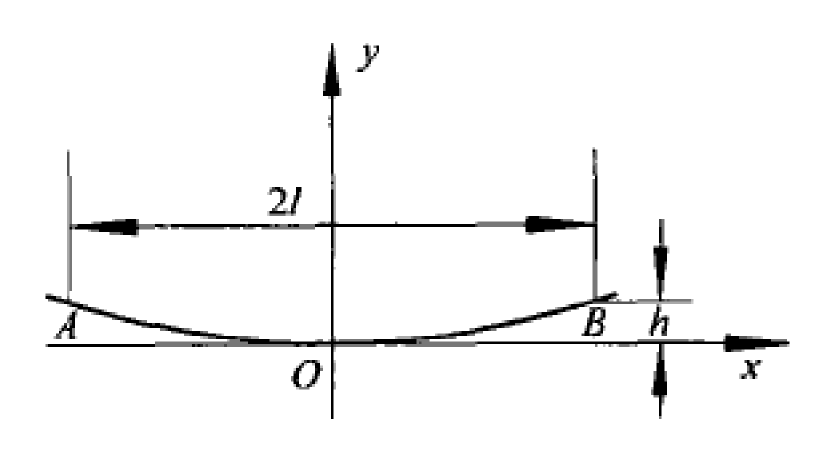


图 5.2

$$\begin{aligned}s&=2\int_0^{10}\sqrt{1+\left(\frac{1}{125}x\right)^2}\,dx\\&=250\int_0^{\frac{2}{25}}\sqrt{1+t^2}\,dt=250\int_0^{\frac{2}{25}}(1+t^2)^{\frac{1}{2}}\,dt\\&=250\int_0^{\frac{2}{25}}\left(1+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2!2^2}t^4+\frac{1\cdot 3}{3!2^3}t^6-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4!2^4}t^8+\cdots\right)dt\\&=250\left(\frac{2}{25}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2^3}{25^3}-\frac{1}{5\cdot 2!2^2}\cdot\frac{2^5}{25^5}+\cdots\right),\end{aligned}$$

如取前两项计算积分值，则其误差 $0<\Delta<\frac{250}{5\cdot 2!\cdot 2^2}\cdot\frac{2^5}{25^5}<10^{-2}$. 因此，

$$s\approx 250\left(\frac{2}{25}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2^3}{25^3}\right)\approx 20+0.02=20.02\text{m},$$

即所求的电线长为 20.02m，精确到 0.01m.

注 严格地说，若不计电线的伸长，电线的形状应为悬链线.

§6. 傅里叶级数

1° **展开定理** 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-l,l)$ 内分段连续并有分段连续的导数 $f'(x)$，并且一切不连续点 ξ 是正则的 $\left[\text{即 } f(\xi)=\frac{1}{2}[f(\xi-0)+f(\xi+0)]\right]$，则函数 $f(x)$ 在此区间上可用傅里叶级数表示：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{1}$$

式中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,\cdots), \tag{2}$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots). \tag{2'}$$

特别是：

(i) 若函数 $f(x)$ 是偶函数，则有：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}, \tag{3}$$

式中 $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,\cdots)$；

(ii) 若函数 $f(x)$ 是奇函数，则有：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{4}$$

式中 $b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots)$.

一个在区间 $(0,l)$ 中有定义的并且具有上述连续性的函数 $f(x)$，可在该区间内用公式(3)及公式(4)表示.

2° **完全性条件** 对于任何在区间 $(-l,l)$ 上可积的且其平方也可积的函数 $f(x)$，组成具有系数(2)，(2′)的级数(1)，则李雅普诺夫等式成立：

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)\mathrm{d}x.$$

3° **傅里叶级数的积分法** 在区间 $(-l,l)$ 内按黎曼意义可积的函数 $f(x)$ 之傅里叶级数(1)（即使是发散的），可以在此区间内逐项积分.

【2936】 将函数 $f(x)=\sin^4 x$ 展开成傅里叶级数.

解 在 $[-\pi,\pi]$ 上，函数 $f(x)=\sin^4 x$ 展开成傅里叶级数，有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

由于

$$\sin^4 x=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cdot\frac{1+\cos 4x}{2}=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x,$$

故有

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^4 x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\right)\mathrm{d}x=\frac{3}{4},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^4 x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{8}\cos nx-\frac{1}{2}\cos 2x\cos nx+\frac{1}{8}\cos 4x\cos nx\right)\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}0, & n\neq 2,\ n\neq 4,\\ -\frac{1}{2}, & n=2,\\ \frac{1}{8}, & n=4;\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4 x\sin nx\mathrm{d}x=0\quad(n=1,2,\cdots).$$

又函数 $f(x)$ 处处连续，故其傅里叶级数收敛于函数本身，即 $f(x)=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x.$

注 由此题可以看出，周期为 2π 的三角多项式的傅里叶级数就是它本身，下面一题将给出一般的证明.

【2937】 三角多项式 $p_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}(\alpha_i\cos ix+\beta_i\sin ix)$ 的傅里叶级数是怎样的？

解 $p_n(x)$ 是以 2π 为周期的函数，不妨在 $[-\pi,\pi]$ 上展开成傅里叶级数. 由于

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}p_n(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{i=0}^{n}(\alpha_i\cos ix+\beta_i\sin ix)\mathrm{d}x=2\alpha_0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}p_n(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{i=0}^{n}(\alpha_i\cos ix+\beta_i\sin ix)\cos nx\mathrm{d}x=\alpha_n;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}p_n(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{i=0}^{n}(\alpha_i\cos ix+\beta_i\sin ix)\sin nx\mathrm{d}x=\beta_n.$$

于是，在 $[-\pi,\pi]$ 上，有

$$p_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\sum_{i=0}^{n}(\alpha_i\cos ix+\beta_i\sin ix),$$

即 $p_n(x)$ 的傅里叶级数就是它本身.

【2938】 将函数 $f(x)=\operatorname{sgn}x\ (-\pi<x<\pi)$ 展开为傅里叶级数.

绘出函数的图像及此函数之傅里叶级数之若干部分和的图像.

利用该展开式，求莱布尼茨级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 的和.

解 由于

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi}\operatorname{sgn}x\mathrm{d}x=0,\qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sgn}x\cos nx\mathrm{d}x=0;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sgn}x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\operatorname{sgn}x\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{2}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n],$$

又函数 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上只有一个第一类不连续点，故其傅里叶级数收敛，且有

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & 0<x<\pi.\end{cases}$$

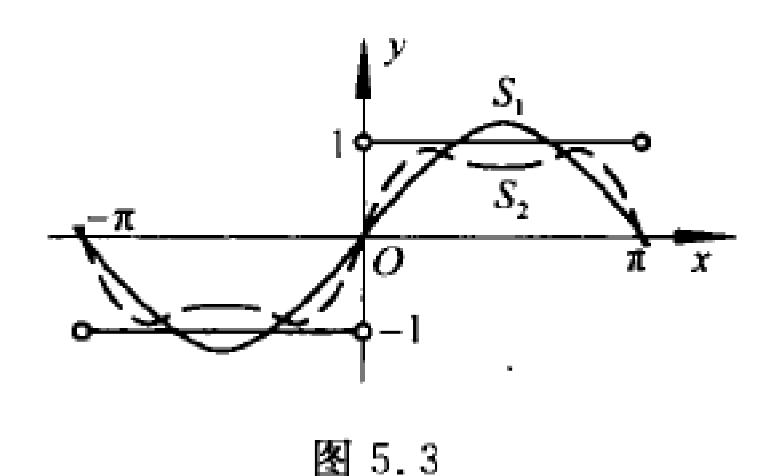


图 5.3

$f(x)$ 及其傅里叶级数之若干部分和的图像如图 5.3 所示，其中画的是一项 S_1、两项之和 S_2 及 $f(x)$ 的图像.

若令 $x=\frac{\pi}{2}$，则得 $\frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}=1$，即莱布尼茨级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}.$$

在所指定的区间内把下列函数展开为傅里叶级数：

【2939】 在区间 $(0,2l)$ 内展开 $f(x)=\begin{cases}A, & 0<x<l,\\ 0, & l<x<2l,\end{cases}$ 其中 A 为常数.

解 由于

$$a_0=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{l}\int_0^{l}A\mathrm{d}x=A,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{1}{l}\int_0^{l}A\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=0;$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{1}{l}\int_0^l A\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{A}{n\pi}[1-(-1)^n],$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为

$$\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)\frac{\pi x}{l}=\begin{cases}A, & 0<x<l\\ \frac{A}{2}, & x=l,\\ 0, & l<x<2l.\end{cases}$$

【2940】 在区间$(-\pi,\pi)$内展开 $f(x)=x$.

解 因为 $f(x)=x$ 为奇函数，从而，$a_0=a_n=0$，且

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x=(-1)^{n-1}\frac{2}{n},$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为 $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}=x \quad (-\pi<x<\pi)$.

【2941】 在区间$(0,2\pi)$内展开 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$.

解 由于

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\left(\pi x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos nx\mathrm{d}x=\frac{\pi-x}{2n\pi}\sin nx\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx\mathrm{d}x=0;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{\pi-x}{2n\pi}\cos nx\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{n},$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2} \quad (0<x<2\pi)$.

【2942】 在区间$(-\pi,\pi)$内展开 $f(x)=|x|$.

解 因为 $f(x)=|x|$为偶函数，从而，$b_n=0$，且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}=\pi,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}x\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1],$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为 $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}=|x| \quad (-\pi<x<\pi)$.

【2943】 在区间$(-\pi,\pi)$内展开 $f(x)=\begin{cases}ax, & -\pi<x<0,\\ bx, & 0<x<\pi,\end{cases}$ 其中 a 和 b 为常数.

解 由于

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^0 ax\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}bx\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^0 ax\cos nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}bx\cos nx\mathrm{d}x=\frac{a-b}{n^2\pi}[1-(-1)^n];$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^0 ax\sin nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}bx\sin nx\mathrm{d}x=\frac{a+b}{n}(-1)^{n+1},$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为

$$\frac{b-a}{4}\pi+\frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+(a+b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx=\begin{cases}ax, & -\pi<x<0,\\ 0, & x=0,\\ bx, & 0<x<\pi.\end{cases}$$

【2944】 在区间$(-\pi,\pi)$内展开 $f(x)=\pi^2-x^2$.

解 因为 $f(x)=\pi^2-x^2$ 为偶函数，从而，$b_n=0$，且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left(\pi^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{4\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\cos nx\mathrm{d}x=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x=-\frac{2}{n\pi}x^2\sin nx\Big|_0^{\pi}+\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{4}{n^2\pi}x\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x=\frac{4}{n^2}(-1)^{n+1},$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为 $\frac{2\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx=\pi^2-x^2\quad(-\pi<x<\pi)$.

【2945】 在区间$(-\pi,\pi)$内展开 $f(x)=\cos ax$(a 不是整数).

解 因为 $f(x)=\cos ax$ 为偶函数，从而，$b_n=0$，且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\mathrm{d}x=\frac{2}{a\pi}\sin a\pi,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(n+a)x+\cos(n-a)x]\mathrm{d}x=\frac{2\sin a\pi}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}a}{n^2-a^2},$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为 $\frac{2\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a\cos nx}{n^2-a^2}\right]=\cos ax\quad(-\pi<x<\pi)$.

【2946】 在区间$(-\pi,\pi)$内展开 $f(x)=\sin ax$(a 不是整数).

解 因为 $f(x)=\sin ax$ 为奇函数，从而，$a_0=a_n=0$，且

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin ax\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(n-a)x-\cos(n+a)x]\mathrm{d}x=\frac{2\sin a\pi}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2-a^2},$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为 $\frac{2\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n\sin nx}{n^2-a^2}=\sin ax\quad(-\pi<x<\pi)$.

【2947】 在区间$(-\pi,\pi)$内展开 $f(x)=\mathrm{sh}ax$.

解 因为 $f(x)$为奇函数，从而，$a_0=a_n=0$，且

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{sh}ax\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\mathrm{sh}ax\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{a}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{ch}ax\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}\mathrm{sh}a\pi+\frac{a}{n^2}\mathrm{ch}ax\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{a^2}{n^2}\int_0^{\pi}\mathrm{sh}ax\sin nx\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}\mathrm{sh}a\pi-\frac{a^2}{n^2}\int_0^{\pi}\mathrm{sh}ax\sin nx\mathrm{d}x\right]=\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\mathrm{sh}a\pi-\frac{a^2}{n^2}b_n,$$

即 $b_n=\frac{(-1)^{n+1}2n}{(n^2+a^2)\pi}\mathrm{sh}a\pi$，故按展开定理，$f(x)$可展开为

$$\frac{2\mathrm{sh}a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\sin nx}{n^2+a^2}=\mathrm{sh}ax\quad(-\pi<x<\pi).$$

【2948】$^{+}$ 在区间$(-h,h)$内展开 $f(x)=\mathrm{e}^{ax}$.

解 由于

$$a_0=\frac{1}{h}\int_{-h}^{h}\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x=\frac{1}{ah}(\mathrm{e}^{ah}-\mathrm{e}^{-ah})=\frac{2}{ah}\mathrm{sh}ah,$$

$$a_n=\frac{1}{h}\int_{-h}^{h}\mathrm{e}^{ax}\cos\frac{n\pi x}{h}\mathrm{d}x=\frac{1}{h}\cdot\frac{a\cos\frac{n\pi x}{h}+\frac{n\pi}{h}\sin\frac{n\pi x}{h}}{a^2+\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2}\mathrm{e}^{ax}\Big|_{-h}^{h}=\frac{(-1)^n2ah}{(ah)^2+(n\pi)^2}\mathrm{sh}ah;$$

$$b_n=\frac{1}{h}\int_{-h}^{h}\mathrm{e}^{ax}\sin\frac{n\pi x}{h}\mathrm{d}x=\frac{1}{h}\cdot\frac{a\sin\frac{n\pi x}{h}-\frac{n\pi}{h}\cos\frac{n\pi x}{h}}{a^2+\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2}\mathrm{e}^{ax}\Big|_{-h}^{h}=\frac{(-1)^{n+1}2n\pi}{(ah)^2+(n\pi)^2}\mathrm{sh}ah,$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为

$$2\mathrm{sh}ah\left[\frac{1}{2ah}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{ah\cos\frac{n\pi x}{h}-n\pi\sin\frac{n\pi x}{h}}{(ah)^2+(n\pi)^2}\right]=\mathrm{e}^{ax}\quad(-h<x<h).$$

【2949】 在区间$(a,a+2l)$内展开 $f(x)=x$.

解 由于

$$a_0=\frac{1}{l}\int_a^{a+2l}x\mathrm{d}x=2(a+l),$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_a^{a+2l}x\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{1}{n\pi}x\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_a^{a+2l}-\frac{1}{n\pi}\int_a^{a+2l}\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{2l}{n\pi}\sin\frac{n\pi a}{l};$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_a^{a+2l}x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=-\frac{1}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_a^{a+2l}+\frac{1}{n\pi}\int_a^{a+2l}\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=-\frac{2l}{n\pi}\cos\frac{n\pi a}{l},$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为

$$a+l+\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}-\cos\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)=x\quad(a<x<a+2l).$$

【2950】 在区间$(-\pi,\pi)$内展开 $f(x)=x\sin x$.

解 因为 $f(x)$为偶函数，从而，$b_n=0$，且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left(-x\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\mathrm{d}x\right)=2,$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x[\sin(n+1)x-\sin(n-1)x]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2}+\frac{x\cos(n-1)x}{n-1}-\frac{\sin(n-1)x}{(n-1)^2}\right]\Bigg|_0^{\pi}\\&=\frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1}\quad(n=2,3,\cdots),\end{aligned}$$

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]\Bigg|_0^{\pi}=-\frac{1}{2},$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为 $1-\frac{1}{2}\cos x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx=x\sin x\quad(-\pi<x<\pi)$.

【2951】 在区间$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$内展开 $f(x)=x\cos x$.

解 因为 $f(x)$为奇函数，从而，$a_0=a_n=0$，且

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\sin 2nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x[\sin(2n+1)x+\sin(2n-1)x]\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos(2n+1)x}{2n+1}+\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2}-\frac{x\cos(2n-1)x}{2n-1}+\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{(-1)^{n+1}16}{\pi}\frac{n}{(4n^2-1)^2},\end{aligned}$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为$\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx=x\cos x\quad(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2})$.

将下列周期函数展开成傅里叶级数：

【2952】 $f(x)=\mathrm{sgn}(\cos x)$.

解 由于

$$f(x+2\pi)=\mathrm{sgn}[\cos(x+2\pi)]=\mathrm{sgn}(\cos x)=f(x),$$

故 $f(x)$是以 2π 为周期的周期函数，又 $f(x)$为偶函数，从而，$b_n=0$，且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{sgn}(\cos x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-1)\mathrm{d}x\right)=0,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{sgn}(\cos x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\right)=\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$=\begin{cases}0, & n=2k\ (k=1,2,3,\cdots),\\ (-1)^k\dfrac{4}{(2k+1)\pi}, & n=2k+1\ (k=0,1,2,\cdots),\end{cases}$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为 $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left[(-1)^k\frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}\right]=\mathrm{sgn}(\cos x)\quad(-\pi<x<\pi)$.

注意 此式在 $f(x)$ 的不连续点 $x=-\frac{\pi}{2}$ 和 $x=\frac{\pi}{2}$ 也成立，这是因为在这些点满足 $f(x)=\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$. 于是，上述展式对一切 $-\infty<x<+\infty$ 皆成立.

【2953】 $f(x)=\arcsin(\sin x)$.

解 $f(x)$是以 2π 为周期的连续周期函数，又 $f(x)$在$(-\pi,\pi)$内为一奇函数，从而，$a_0=a_n=0$，且

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\arcsin(\sin x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin nx\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\sin nx\,dx\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\left(-\frac{x}{n}\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{n}\cos nx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\left(\frac{x}{n}\cos nx-\frac{1}{n^2}\sin nx\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right]=\frac{4}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$=\begin{cases}0, & n=2k\ (k=1,2,3,\cdots),\\ (-1)^k\dfrac{4}{\pi(2k+1)^2}, & n=2k+1\ (k=0,1,2,\cdots),\end{cases}$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)x=\arcsin(\sin x)$. $(-\infty<x<+\infty)$.

【2954】 $f(x)=\arcsin(\cos x)$.

解 $f(x)$是以 2π 为周期的连续周期函数，又 $f(x)$为偶函数，从而，$b_n=0$，且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\arcsin(\cos x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=0,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\arcsin(\cos x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2n}\sin nx-\frac{x}{n}\sin nx-\frac{1}{n^2}\cos nx\right]\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\ \frac{1}{n^2}[1-(-1)^n]$$

$$=\begin{cases}0, & n=2k\ (k=1,2,3,\cdots),\\ \dfrac{4}{(2k+1)^2\pi}, & n=2k+1\ (k=0,1,2,\cdots),\end{cases}$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}=\arcsin(\cos x)\quad(-\infty<x<+\infty)$.

【2955】 $f(x)=x-[x]$.

提示 注意函数 $f(x)$的周期为 1.

解 因为

$$f(x+1)=x+1-[x+1]=x+1-[x]-1=x-[x]=f(x),$$

故 $f(x)$是以 1 为周期的周期函数，而且，除 $x=k,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$诸点外，$f(x)$都连续. 由于

$$a_0=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^1\{x-[x]\}\,dx=2\int_0^1 x\,dx=1,$$

$$a_n=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^1\{x-[x]\}\cos2n\pi x\,dx=2\int_0^1 x\cos2n\pi x\,dx$$

$$=2\left[\frac{x}{2n\pi}\sin2n\pi x+\frac{1}{4(n\pi)^2}\cos2n\pi x\right]\Big|_0^1=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^1\{x-[x]\}\sin2n\pi x\,dx=2\int_0^1 x\sin2n\pi x\,dx$$

$$=2\left[-\frac{x}{2n\pi}\cos 2n\pi x+\frac{1}{4(n\pi)^2}\sin 2n\pi x\right]\Bigg|_0^1=-\frac{1}{n\pi},$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为 $\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n}=x-[x]$ $(x\neq k,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

【2956】 $f(x)=(x)$，其中(x)是 x 到与它最近的整数的距离.

提示 与 2955 题相同.

解 $f(x)$是以 1 为周期的连续周期函数. 由于

$$a_0=2\int_0^1(x)\mathrm{d}x=2\left[\int_0^{\frac{1}{2}}x\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1(1-x)\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{2},$$

$$a_n=2\int_0^1(x)\cos 2n\pi x\mathrm{d}x=2\left[\int_0^{\frac{1}{2}}x\cos 2n\pi x\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1(1-x)\cos 2n\pi x\mathrm{d}x\right]$$

$$=2\left\{\left[\frac{x}{2n\pi}\sin 2n\pi x+\frac{1}{4(n\pi)^2}\cos 2n\pi x\right]\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{1}{2n\pi}\sin 2n\pi x-\frac{x}{2n\pi}\sin 2n\pi x-\frac{1}{4(n\pi)^2}\cos 2n\pi x\right]\Bigg|_{\frac{1}{2}}^1\right\}$$

$$=\frac{1}{(n\pi)^2}[(-1)^n-1]$$

$$=\begin{cases}0, & n=2k\ (k=1,2,3,\cdots),\\ -\frac{2}{\pi^2}\cdot\frac{1}{(2k+1)^2}, & n=2k+1\ (k=0,1,2,\cdots),\end{cases}$$

$$b_n=2\left[\int_0^{\frac{1}{2}}x\sin 2n\pi x\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1(1-x)\sin 2n\pi x\mathrm{d}x\right]$$

$$=2\left\{\left[-\frac{x}{2n\pi}\cos 2n\pi x+\frac{1}{4(n\pi)^2}\sin 2n\pi x\right]\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}+\left[-\frac{1}{2n\pi}\cos 2n\pi x+\frac{x}{2n\pi}\cos 2n\pi x-\frac{1}{4(n\pi)^2}\sin 2n\pi x\right]\Bigg|_{\frac{1}{2}}^1\right\}$$

$$=0,$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为$\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos 2\pi(2k+1)x}{(2k+1)^2}=(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$.

【2957】 $f(x)=|\sin x|$.

解 $f(x)$是以 π 为周期的连续周期函数，又 $f(x)$为偶函数，从而，$b_n=0$，且

$$a_0=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi},$$

$$a_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\cos 2nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{2n+1}\cos(2n+1)x+\frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)x\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{4}{\pi}\ \frac{1}{4n^2-1},$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为 $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}=|\sin x|$ $(-\infty<x<+\infty)$.

【2958】 $f(x)=|\cos x|$.

解 由于

$$f(x)=|\cos x|=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|,$$

故有 $$|\cos x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{4n^2-1}^{*)}=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos 2nx}{4n^2-1}$$

$$=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}\quad(-\infty<x<+\infty).$$

*) 利用 2957 题的结果.

【2959】 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\frac{\sin nx}{\sin x}$ $(|\alpha|<1)$.

解 显然 $p_n(x)=\dfrac{\sin nx}{\sin x}$ 是 $-\infty<x<+\infty$ 的连续函数，注意，当 $x=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，函数值理解为其极限值

$$\lim_{x\to k\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}=\lim_{x\to k\pi}\frac{n\cos nx}{\cos x}=n(-1)^{(n-1)k},$$

并且 $p_n(x)$ 是一个周期为 2π 的周期函数且为偶函数. 此外，

$$p_n(x)=\frac{\sin nx}{\sin x}=\frac{\sin(n-1)x\cos x+\cos(n-1)x\sin x}{\sin x}=p_{n-1}(x)\cos x+\cos(n-1)x,$$

故

$$|p_n(x)|\leqslant|p_{n-1}(x)|+1\quad(-\infty<x<+\infty;\ n=2,3,\cdots).$$

注意到 $p_1(x)\equiv1$，由上式，利用数学归纳法即知，

$$|p_n(x)|\leqslant n\quad(-\infty<x<+\infty;\ n=1,2,\cdots).$$

于是，

$$\left|\alpha^n\frac{\sin nx}{\sin x}\right|\leqslant n|\alpha|^n\quad(-\infty<x<+\infty;\ n=1,2,\cdots).$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n|\alpha|^n$ 收敛(因为 $|\alpha|<1$)，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha^n\dfrac{\sin nx}{\sin x}$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 上一致收敛. 由此可知，$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha^n\dfrac{\sin nx}{\sin x}$ 是 $-\infty<x<+\infty$ 上的连续函数，且在任何有限区间上均可逐项积分.

注意到 $f(x)$ 为以 2π 为周期的周期函数，并且是偶函数，故 $b_n=0$，且

$$\begin{aligned}a_0&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\frac{\sin nx}{\sin x}dx=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}dx\\&=\frac{2}{\pi}\left[\sum_{n=2,4\cdots}\alpha^n\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}dx+\sum_{n=1,3\cdots}\alpha^n\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}dx\right]=2\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{2k+1}{}^{*)}=\frac{2\alpha}{1-\alpha^2},\\a_n&=\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\alpha^m\int_0^{\pi}\frac{\sin mx\cos nx}{\sin x}dx=\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\alpha^m\int_0^{\pi}\frac{\sin(m+n)x+\sin(m-n)x}{\sin x}dx,=I_1+I_2,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}I_1&=\frac{1}{\pi}\sum_{m\leqslant n}\alpha^m\int_0^{\pi}\frac{\sin(m+n)x+\sin(m-n)x}{\sin x}dx,\\I_2&=\frac{1}{\pi}\sum_{m>n}\alpha^m\int_0^{\pi}\frac{\sin(m+n)x+\sin(m-n)x}{\sin x}dx.\end{aligned}$$

当 $m\leqslant n$ 时，不论 $m+n$ 及 $m-n$ 是偶数，还是 $m+n$ 及 $m-n$ 是奇数，I_1 中诸积分都为零，故有 $I_1=0$. 当 $m>n$ 时，若 $m+n$ 及 $m-n$ 为偶数，则 I_2 中对应的积分等于零；若 $m+n$ 及 $m-n$ 为奇数，则 I_2 中对应的积分等于 2π. 于是，

$$I_2=2\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{(2k+1)+n}=2\cdot\frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha^2}.$$

由于 $a_n=I_2$，故按展开定理，$f(x)$ 可展开为

$$f(x)=\frac{\alpha}{1-\alpha^2}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\cos nx\right)\quad(-\infty<x<+\infty).$$

*) 利用 2291 题的结果.

【2960】$^+$ 把函数 $f(x)=\sec x$ $\left(-\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{4}\right)$ 展开为傅里叶级数.

解 显然 $f(x)=\sec x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$ 内连续，而且是偶函数，故 $b_n=0$，且

$$a_0=\frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x\,dx=\frac{8}{\pi}\left[\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{8}{\pi}\left[\ln\left|\frac{\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}\right|\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{8}{\pi}\left[\ln\left|\frac{1-\cos(x+\frac{x}{2})}{\sin(x+\frac{x}{2})}\right|\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{8}{\pi}\left[\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{8}{\pi}\ln(1+\sqrt{2}),$$

$$a_n=\frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 4nx}{\cos x}\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots).$$

由于

$$\cos 4nx-\cos(4nx-4x)=-2\sin(4nx-2x)\sin 2x=-4\sin(4nx-2x)\sin x\cos x$$
$$=2[\cos(4nx-x)-\cos(4nx-3x)]\cos x,$$

故

$$a_n=\frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 4nx}{\cos x}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{16}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\cos(4n-1)x-\cos(4n-3)x]\mathrm{d}x+\frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 4(n-1)x}{\cos x}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{16}{\pi}\left[\frac{1}{4n-1}\sin\left(n\pi-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{4n-3}\sin(n\pi-\frac{3}{4}\pi)\right]+a_{n-1}$$
$$=\frac{16}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{4n-1}\sin\frac{\pi}{4}-\frac{(-1)^{n-1}}{4n-3}\sin\frac{3\pi}{4}\right]+a_{n-1}$$
$$=\frac{16}{\pi}(-1)^n\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-1}\right)+a_{n-1}$$
$$=\frac{16}{\pi}\frac{\sqrt{2}(-1)^n}{(4n-3)(4n-1)}+a_{n-1}\quad(n=1,2,\cdots).$$

由此递推公式，得

$$a_n=\frac{16\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{(4k-3)(4k-1)}+a_0=\frac{16\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{(4k-3)(4k-1)}+\frac{8}{\pi}\ln(1+\sqrt{2})$$
$$(n=1,2,\cdots).$$

于是，下面的展式成立：

$$\sec x=\frac{4}{\pi}\ln(1+\sqrt{2})+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{8}{\pi}\ln(1+\sqrt{2})-\frac{16\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{(4k-3)(4k-1)}\right]\cos 4nx$$
$$(-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}).$$

【2961】 将函数 $f(x)=x^2$ 展开成傅里叶级数：(1)在区间 $(-\pi,\pi)$ 内按倍角的余弦展开；(2)在区间 $(0,\pi)$ 内按倍角的正弦展开；(3)在区间 $(0,2\pi)$ 内展开.

绘出函数的图像及情形(1)、(2)与(3)的傅里叶级数之和的图像.

利用这些展开式，求级数的和：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

解 (1)由于 $b_n=0$，且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{n}\sin nx+\frac{2x}{n^2}\cos nx-\frac{2}{n^3}\sin nx\right)\Bigg|_0^{\pi}=(-1)^n\frac{4}{n^2},$$

故 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上按余弦展开为 $\frac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx=x^2\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$.

(2) 由于 $a_0=a_n=0$，且

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x^2}{n}\cos nx+\frac{2}{n^2}x\sin nx+\frac{2}{n^3}\cos nx\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1}+\frac{4}{n^3\pi}[(-1)^n-1],$$

故 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上按正弦展开为 $2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx-\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3}=x^2 \quad (0\leqslant x<\pi)$.

(3)由于 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\,dx=\frac{8\pi^2}{3}$,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{n}\sin nx+\frac{2x}{n^2}\cos nx-\frac{2}{n^3}\sin nx\right)\bigg|_0^{2\pi}=\frac{4}{n^2},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x^2}{n}\cos nx+\frac{2x}{n^2}\sin nx+\frac{2}{n^3}\cos nx\right)\bigg|_0^{2\pi}=-\frac{4\pi}{n},$$

故 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上可展开为 $\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=x^2 \quad (0<x<2\pi)$.

函数的图像,(1)、(2)及(3)的傅里叶级数之和的图像,如图 5.4、图 5.5、图 5.6 及图 5.7 所示.

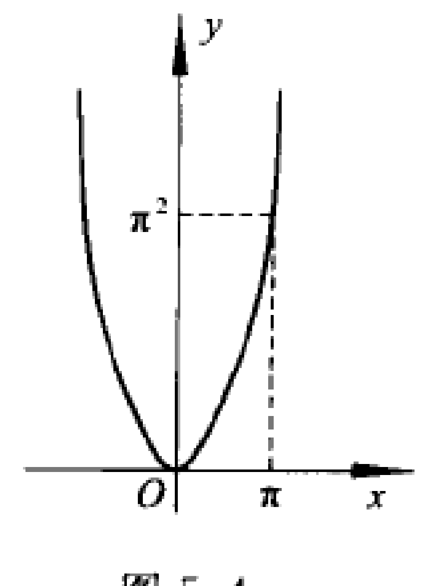


图 5.4

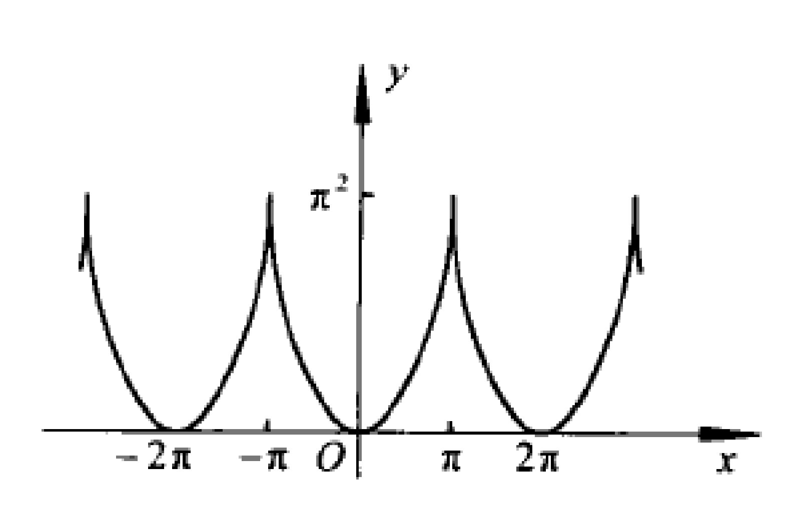


图 5.5

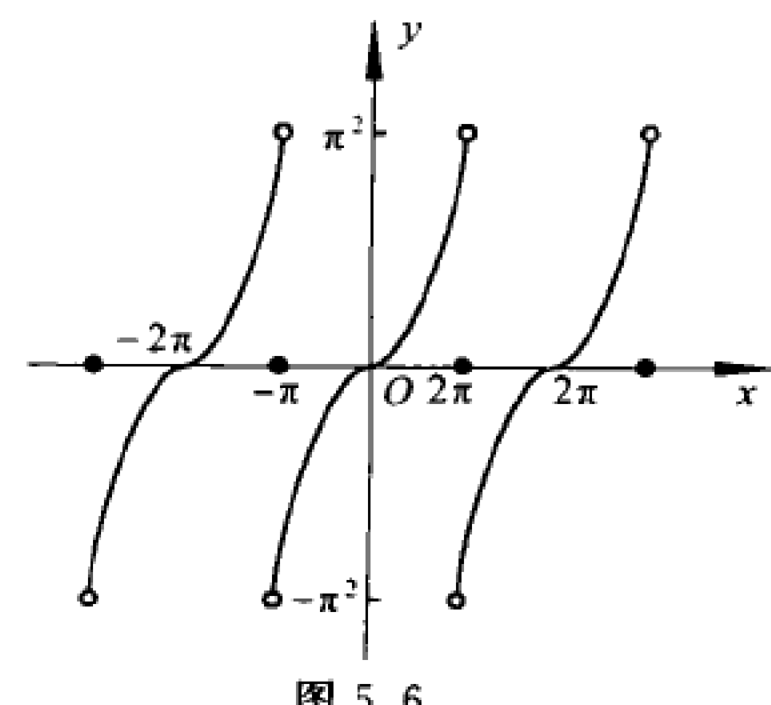


图 5.6

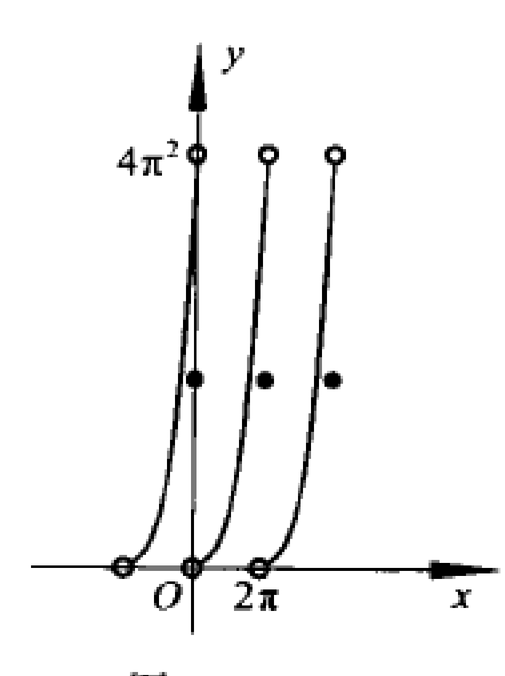


图 5.7

若在展开式(1)中令 $x=\pi$,则得 $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n=\pi^2$,于是,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}. \tag{1'}$$

若在展开式(3)中令 $x=\pi$,则得 $\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\pi^2$,于是,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}. \tag{2'}$$

将级数(1′)和(2′)相加,得 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right]=\frac{\pi^2}{4}$,即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}. \tag{3'}$$

【2962】 由展开式

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\quad(-\pi<x<\pi),$$

用逐项积分的方法，求函数 x^2,x^3 和 x^4 在区间$(-\pi,\pi)$内的傅里叶级数.

解 将原式在$[0,x]$上逐项积分，得

$$\frac{x^2}{2}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx-1}{n^2}.$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12},$$

代入上式，即得

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}\quad(-\pi<x<\pi).\tag{1}$$

将(1)式在$[0,x]$上逐项积分，并将 $x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$ 的结果代入，即得

$$x^3=2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n^3}\quad(-\pi<x<\pi).\tag{2}$$

将上式从 $-\pi$ 到 x 积分，并以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$*) 代入，得

$$\frac{x^4}{4}-\frac{\pi^4}{4}=2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}-2\pi^2\cdot\frac{\pi^2}{6}+12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n^4}+12\cdot\frac{\pi^4}{90},$$

即

$$x^4=\frac{\pi^4}{5}+8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}+48\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n^4}\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi).\tag{3}$$

*) 由 $x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$ 及

$$x^3=2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n^3}=\pi^2x+12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n^3},$$

得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n^3}=\frac{\pi^2x-x^3}{12}\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

将上式从 0 到 x 积分，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx-1}{n^4}=\frac{2\pi^2x^2-x^4}{48}\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

以 $x=\pi$ 代入，得 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1-(-1)^n}{n^4}=\frac{\pi^4}{48}$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}.\tag{4}$$

由于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\tag{5}$$

收敛，故可设其和为 S. 于是，由(5)－(4)得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4}=S-\frac{\pi^4}{96},$$

即 $\frac{S}{16}=S-\frac{\pi^4}{96}$，从而，$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$. 同时，还可求出 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4}=\frac{\pi^4}{2^4\cdot 90}$ 及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4}=\pi^4\left(\frac{1}{96}-\frac{1}{2^4\cdot 90}\right)=\frac{7}{720}\pi^4.$$

也可利用此结果求得 x^4 的展开式，事实上，将 x^3 的展开式从 0 到 x 积分，再以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}\quad 及 \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}=\frac{7\pi^4}{720}$$

代入即得.

【2963】 写出函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<\alpha,\\ 0, & \alpha<|x|<\pi\end{cases}$ 的李雅普诺夫等式.

利用李雅普诺夫等式，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}$ 之和.

解 由于 $f(x)$ 为偶函数，从而，$b_n=0$，且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}dx=\frac{2\alpha}{\pi},\quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}\cos nx\,dx=\frac{2\sin n\alpha}{n\pi},$$

又 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}dx=\frac{2\alpha}{\pi}$，故对应于 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开的李雅普诺夫等式为

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{2\alpha^2}{\pi^2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{2\alpha}{\pi}.$$

于是，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}=\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}$，而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}^{*)}-\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}=\frac{\pi^2-3\pi\alpha+3\alpha^2}{6}.$$

*) 利用 2961 题的结果.

【2964】 将函数 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & 1<x<2,\\ 3-x, & 2\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$ 展开成傅里叶级数.

解 将 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上按周期为 3 作傅里叶展开，注意其图像，易见 $f(x)$ 的延拓(周期为 3)是偶函数，从而，$b_n=0$，且

$$a_0=\frac{1}{\frac{3}{2}}\int_0^3 f(x)dx=\frac{2}{3}\int_0^1 x\,dx+\frac{2}{3}\int_1^2 dx+\frac{2}{3}\int_2^3(3-x)dx=\frac{4}{3},$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{3}\int_0^1 x\cos\frac{2n\pi x}{3}dx+\frac{2}{3}\int_1^2\cos\frac{2n\pi x}{3}dx+\frac{2}{3}\int_2^3(3-x)\cos\frac{2n\pi x}{3}dx\\&=\frac{2}{3}\left\{\left[\frac{3}{2n\pi}x\sin\frac{2n\pi x}{3}+\frac{9}{4n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}\right]\Bigg|_0^1+\frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{3}\Bigg|_1^2\right.\\&\quad\left.+\left[\frac{9}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{3}-\frac{3}{2n\pi}x\sin\frac{2n\pi x}{3}-\frac{9}{4n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}\right]\Bigg|_2^3\right\}\\&=\frac{2}{3}\left[-\frac{9}{2(n\pi)^2}+\frac{9}{4(n\pi)^2}\left(\cos\frac{2n\pi}{3}+\cos\frac{4n\pi}{3}\right)\right]=-\frac{3}{(n\pi)^2}+\frac{3}{(n\pi)^2}(-1)^n\cos\frac{n\pi}{3},\end{aligned}$$

故按展开定理，$f(x)$ 在 $[0,3]$ 可按余弦展开为

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi}{3}\right]\cos\frac{2n\pi x}{3}=f(x).$$

由于

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi}{3}\right]\cos\frac{2n\pi x}{3}\\&=\left(-\frac{1}{1^2}-\frac{1}{1^2}\cdot\frac{1}{2}\right)\cos\frac{2\pi x}{3}+\left(-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2}\right)\cos\frac{4\pi x}{3}+\left(-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}\right)\cos2\pi x\\&\quad+\left(-\frac{1}{4^2}-\frac{1}{4^2}\cdot\frac{1}{2}\right)\cos\frac{8\pi x}{3}+\left(-\frac{1}{5^2}-\frac{1}{5^2}\cdot\frac{1}{2}\right)\cos\frac{10\pi x}{3}+\left(-\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^2}\right)\cos4\pi x+\cdots\\&=-\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos2n\pi x,\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 的余弦展开式可写为

$$\frac{2}{3}-\frac{9}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos 2n\pi x=f(x)\quad(0\leqslant x\leqslant 3).$$

利用公式 $\cos x=\frac{1}{2}(t+\bar{t})$，$\sin x=\frac{1}{2i}(t-\bar{t})$，式中 $t=e^{ix}$ 及 $\bar{t}=e^{-ix}$，将下列函数展开成傅里叶级数：

【2965】$^{+}$　$\cos^{2m}x$　（m 为正整数）.

解　$\cos^{2m}x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^{2m}=\frac{1}{2^{2m}}\sum_{l=0}^{2m}C_{2m}^{l}e^{(2m-l)ix}e^{-lix}=\frac{1}{2^{2m}}C_{2m}^{m}+\frac{1}{2^{2m}}\left(\sum_{l=0}^{m-1}+\sum_{l=m+1}^{2m}\right)C_{2m}^{l}e^{2(m-l)ix}$

$$=\frac{1}{2^{2m}}C_{2m}^{m}+\frac{1}{2^{2m}}\left[\sum_{l=0}^{m-1}C_{2m}^{l}e^{2(m-l)ix}+\sum_{l'=0}^{m-1}C_{2m}^{2m-l'}e^{-2(m-l')ix}\right]$$

$$=\frac{1}{2^{2m}}C_{2m}^{m}+\frac{1}{2^{2m}}\sum_{s=0}^{m-1}C_{2m}^{s}\left[e^{2(m-s)ix}+e^{-2(m-s)ix}\right]=\frac{1}{2^{2m}}C_{2m}^{m}+\frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{s=0}^{m-1}C_{2m}^{s}\cos 2(m-s)x$$

$$=\frac{1}{2^{2m}}C_{2m}^{m}+\frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{k=1}^{m}C_{2m}^{m-k}\cos 2kx.$$

由于上述表达式为一三角多项式，故在 $(-\infty,+\infty)$ 内的傅里叶级数展开式即为它本身.

【2966】　$\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}$　$(|q|<1)$.

解　由于

$$\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}=\frac{\frac{q}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})}{1-q(e^{ix}+e^{-ix})+q^2}=\frac{1}{2i}\,\frac{q(e^{ix}-e^{-ix})}{(1-qe^{ix})(1-qe^{-ix})}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-qe^{ix}}-\frac{1}{1-qe^{-ix}}\right)$$

$$=\frac{1}{2i}\left[(1+qe^{ix}+q^2e^{2ix}+\cdots)-(1+qe^{-ix}+q^2e^{-2ix}+\cdots)\right]=q\sin x+q^2\sin 2x+\cdots,$$

及级数

$$q\sin x+q^2\sin 2x+\cdots+q^n\sin nx+\cdots$$

满足 $|q^n\sin nx|\leqslant q^n$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}q^n$（$|q|<1$）收敛，故级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛. 因此，级数

$$q\sin x+q^2\sin 2x+\cdots+q^n\sin nx+\cdots$$

即为其和 $\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}$（它是周期为 2π 的奇函数）的傅里叶级数，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}q^n\sin nx=\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}\quad(-\infty<x<+\infty).$$

【2967】　$\frac{1-q^2}{1-2q\cos x+q^2}$　$(|q|<1)$.

解　由于　$\frac{1-q^2}{1-2q\cos x+q^2}=\frac{1-q^2}{1-q(e^{ix}+e^{-ix})+q^2}=(1-q^2)\frac{1}{(1-qe^{ix})(1-qe^{-ix})}$

$$=-1+\frac{1}{1-qe^{ix}}+\frac{1}{1-qe^{-ix}}$$

$$=-1+(1+qe^{ix}+q^2e^{2ix}+\cdots)+(1+qe^{-ix}+q^2e^{-2ix}+\cdots)$$

$$=1+2\sum_{n=1}^{\infty}q^n\cos nx.$$

又上式右端的级数在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致收敛，因而，它就是函数 $\frac{1-q^2}{1-2q\cos x+q^2}$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 内的傅里叶级数.

【2968】　$\frac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2}$　$(|q|<1)$.

解　由于

$$\frac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2}=\frac{1-\frac{q}{2}(e^{ix}+e^{-ix})}{1-q(e^{ix}+e^{-ix})+q^2}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{2-qe^{ix}-qe^{-ix}}{(1-qe^{ix})(1-qe^{-ix})}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-qe^{ix}}+\frac{1}{1-qe^{-ix}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}[(1+qe^{ix}+q^2e^{2ix}+\cdots)+(1+qe^{-ix}+q^2e^{-2ix}+\cdots)]$$

$$=1+q\cos x+q^2\cos 2x+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}q^n\cos nx,$$

又上式右端的级数在$(-\infty,+\infty)$内一致收敛，因而它就是函数$\frac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2}$在$-\infty<x<+\infty$内的傅里叶级数.

【2969】 $\ln(1-2q\cos x+q^2)\quad(|q|<1)$.

解 由于$1-2q\cos x+q^2\geqslant 1-2q+q^2=(1-q)^2>0$，故$\ln(1-2q\cos x+q^2)$是$(-\infty,+\infty)$内的连续函数，而且是周期为$2\pi$的偶函数，将函数对求$x$导数，得

$$[\ln(1-2q\cos x+q^2)]'=\frac{2q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}=2\sum_{n=1}^{\infty}q^n\sin nx^{*)}\quad(-\infty<x<+\infty).$$

对上式从0到x积分(由于上式中级数在$(-\infty,+\infty)$内一致收敛，故可在有限区间上逐项积分)，则有

$$\ln(1-2q\cos x+q^2)=\int_0^x\frac{2q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}dx+2\ln(1-q)=2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x q^n\sin nx dx+2\ln(1-q)$$

$$=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}\cos nx+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}+2\ln(1-q).$$

而$\ln(1-q)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}$，于是，

$$\ln(1-2q\cos x+q^2)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}\cos nx\quad(-\infty<x<+\infty).$$

由于右端级数在$(-\infty,+\infty)$内一致收敛，故它就是左端函数的傅里叶级数.

*) 利用2966题的结果

将下列无界周期函数展开成傅里叶级数：

【2970】 $f(x)=\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|$.

解 $f(x)$是以2π为周期的周期函数，当$x=2k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时函数有无穷不连续点. 由于$f(x)$是偶函数，从而，$b_n=0$，且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t dt=\frac{4}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right)^{*)}=-2\ln 2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}\cos nx dx=\frac{2}{n\pi}\sin nx\ln\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx$$

$$=-\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}dx$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n-1)t}{\sin t}dt,$$

由于

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dt=\pi^{**)}\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

故

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx=\pi.$$

在上式左端第二个积分中令 $\pi-x=u$,即得与第一个积分相同的积分,从而,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)}{\sin x}dx=\frac{\pi}{2}.$$

利用这一结果,易得

$$a_n=-\frac{1}{n},\quad (n=1,2,\cdots).$$

由于 $f(x)=\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内绝对可积(参看上面 a_0 计算):

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx=2\int_0^{\pi}\left|\ln\sin\frac{x}{2}\right|dx=-2\int_0^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}dx=2\pi\ln 2<+\infty,$$

且除 $x=2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 诸点外,在其他的点 $f(x)$ 均可微,故根据傅里叶级数收敛的 Lipschitz 判别法(参看 T. M. 菲赫金哥尔茨著,微积分学教程,第三卷第三分册 658 目)知,除上述诸点外,$f(x)$ 的傅里叶级数收敛于 $f(x)$ 本身,即

$$\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|=-\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}\quad (x\neq 2k\pi;\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

*) 利用 2353 题的结果.

**) 利用 2291 题的结果.

【2971】 $f(x)=\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|$.

提示 利用 2970 题的结果.

解 利用 2970 题的结果,即得

$$\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|=\ln\left|\sin\frac{\pi-x}{2}\right|=-\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(\pi-x)}{n}=-\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cos nx$$

$$(x\neq(2m+1)\pi;\ m=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

【2972】 $f(x)=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$.

提示 利用 2970 题及 2971 题的结果.

解 利用 2970 题及 2971 题的结果,即得

$$\begin{aligned}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|&=\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|-\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|\\&=\left[-\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}\right]-\left[-\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cos nx\right]\\&=-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}\quad (x\neq k\pi;\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots).\end{aligned}$$

【2973】 将函数 $f(x)=\int_0^x \ln\sqrt{\left|\cot\frac{t}{2}\right|}dt\ (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成傅里叶级数.

解 将函数对 x 求导数,则得

$$f'(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\cot\frac{x}{2}\right|=-\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}^{*)}.$$

由于

$$f'(x)=-\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|=\frac{1}{2}\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|$$

在 $(-\pi,\pi)$ 内绝对可积,故得 $\int_0^x \ln\sqrt{\left|\cot\frac{t}{2}\right|}dt=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^2}\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$.

*) 利用 2972 题的结果.

【2974】 函数 $x=x(s)$, $y=y(s)$ $(0\leqslant s\leqslant 4a)$ 是正方形: $0<x<a$, $0<y<a$ 的围线的参数方程,其中 s

为依逆时针方向从点 $O(0,0)$ 起计算的弧长. 试将这两个函数展开成傅里叶级数.

解 根据定义, $x(s)$ 的表达式可写为

$$x(s)=\begin{cases} s, & 0\leqslant s\leqslant a, \\ a, & a\leqslant s\leqslant 2a, \\ 3a-s, & 2a\leqslant s\leqslant 3a, \\ 0, & 3a\leqslant s\leqslant 4a. \end{cases}$$

于是, $x(s)$ 在 $[0,4a]$ 上的傅里叶级数展开式为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi s}{2a}+b_n\sin\frac{n\pi s}{2a}\right),$$

其中

$$a_0=\frac{1}{2a}\int_0^{4a}x(s)\mathrm{d}s=\frac{1}{2a}\left[\int_0^a s\mathrm{d}s+\int_a^{2a}a\mathrm{d}s+\int_{2a}^{3a}(3a-s)\mathrm{d}s\right]=a,$$

$$\begin{aligned} a_n &=\frac{1}{2a}\int_0^{4a}x(s)\cos\frac{n\pi s}{2a}\mathrm{d}s \\ &=\frac{1}{2a}\left[\int_0^a s\cos\frac{n\pi s}{2a}\mathrm{d}s+\int_a^{2a}a\cos\frac{n\pi s}{2a}\mathrm{d}s+\int_{2a}^{3a}(3a-s)\cos\frac{n\pi s}{2a}\mathrm{d}s\right] \\ &=\frac{1}{2a}\left\{\left[\frac{2a^2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\left(\frac{2a}{n\pi}\right)^2\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right)\right]+\left[-\frac{2a^2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right]\right. \\ &\quad\left.+\left[\left(\frac{6a^2}{n\pi}\sin\frac{3n\pi}{2}\right)-\frac{6a^2}{n\pi}\sin\frac{3n\pi}{2}-\left(\frac{2a}{n\pi}\right)^2\left(\cos\frac{3n\pi}{2}-\cos n\pi\right)\right]\right\} \\ &=\frac{2a}{(n\pi)^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1-\cos\frac{3n\pi}{2}+\cos n\pi\right) \\ &=\begin{cases} 0, & n=2k,\ k=1,2,3,\cdots; \\ -\dfrac{4a}{\pi^2(2k+1)^2}, & n=2k+1,\ k=0,1,2,3,\cdots. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &=\frac{1}{2a}\int_0^{4a}x(s)\sin\frac{n\pi s}{2a}\mathrm{d}s \\ &=\frac{1}{2a}\left[\int_0^a s\sin\frac{n\pi s}{2a}\mathrm{d}s+\int_a^{2a}a\sin\frac{n\pi s}{2a}\mathrm{d}s+\int_{2a}^{3a}(3a-s)\sin\frac{n\pi s}{2a}\mathrm{d}s\right] \\ &=\frac{1}{2a}\left\{\left[-\frac{2a^2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\left(\frac{2a}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi}{2}\right]+\left[-\frac{2a^2}{n\pi}\cos n\pi+\frac{2a^2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\right]\right. \\ &\quad\left.+\left[\left(-\frac{6a^2}{n\pi}\cos\frac{3n\pi}{2}+\frac{6a^2}{n\pi}\cos n\pi\right)+\left(\frac{6a^2}{n\pi}\cos\frac{3n\pi}{2}-\frac{4a^2}{n\pi}\cos n\pi\right)+\left(-\frac{4a^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{3n\pi}{2}\right)\right]\right\} \\ &=\frac{2a}{n^2\pi^2}\left(\sin\frac{n\pi}{2}-\sin\frac{3n\pi}{2}\right) \\ &=\begin{cases} 0, & n=2k,\ k=1,2,3,\cdots, \\ \dfrac{4a(-1)^k}{\pi^2(2k+1)^2}, & n=2k+1,\ k=0,1,2,3,\cdots. \end{cases} \end{aligned}$$

因此, 按展开定理, 注意到 $x(0)=x(4a)$, $x(s)$ 的傅里叶展开式为

$$x(s)=\frac{a}{2}-\frac{4a}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi s}{2a}+\frac{4a}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi s}{2a}\quad(0\leqslant s\leqslant 4a).$$

同样, 根据定义, $y(s)$ 的表达式为

$$y(s)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant s\leqslant a, \\ s-a, & a\leqslant s\leqslant 2a, \\ a, & 2a\leqslant s\leqslant 3a, \\ 4a-s, & 3a\leqslant s\leqslant 4a. \end{cases}$$

于是, $y(s)$ 在 $[0,4a]$ 上的傅里叶级数展开式为

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi s}{2a}+B_n\sin\frac{n\pi s}{2a}\right),$$

其中

$$A_0=\frac{1}{2a}\int_a^{4a}y(s)\mathrm{d}s=\frac{1}{2a}\left[\int_a^{2a}(s-a)\mathrm{d}s+\int_{2a}^{3a}a\,\mathrm{d}s+\int_{3a}^{4a}(4a-s)\mathrm{d}s\right]=a,$$

$$\begin{aligned}A_n&=\frac{1}{2a}\int_0^{4a}y(s)\cos\frac{n\pi s}{2a}\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{2a}\left[\int_a^{2a}(s-a)\cos\frac{n\pi s}{2a}\mathrm{d}s+\int_{2a}^{3a}a\cos\frac{n\pi s}{2a}\mathrm{d}s+\int_{3a}^{4a}(4a-s)\cos\frac{n\pi s}{2a}\mathrm{d}s\right]\\&=\frac{1}{2a}\left\{\left[\left(-\frac{2a^2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{4a^2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-\cos\frac{n\pi}{2})\right)-\left(-\frac{2a^2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\right]\right.\\&\quad\left.+\left[\frac{2a^2}{n\pi}\sin\frac{3n\pi}{2}\right]+\left[\left(-\frac{8a^2}{n\pi}\sin\frac{3n\pi}{2}\right)-\left(-\frac{6a^2}{n\pi}\sin\frac{3n\pi}{2}+\frac{4a^2}{n^2\pi^2}-\frac{4a^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{3n\pi}{2}\right)\right]\right\}\\&=\frac{2a}{n^2\pi^2}\left(\cos n\pi-\cos\frac{n\pi}{2}-1+\cos\frac{3n\pi}{2}\right)\\&=\begin{cases}0, & n=2k,\ k=1,2,3,\cdots,\\-\dfrac{4a}{\pi^2(2k+1)^2}, & n=2k+1,\ k=0,1,2,3,\cdots.\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_n&=\frac{1}{2a}\int_0^{4a}y(s)\frac{n\pi s}{2a}\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{2a}\left[\int_a^{2a}(s-a)\sin\frac{n\pi s}{2a}\mathrm{d}s+\int_{2a}^{3a}a\sin\frac{n\pi s}{2a}\mathrm{d}s+\int_{3a}^{4a}(4a-s)\sin\frac{n\pi s}{2a}\mathrm{d}s\right]\\&=\frac{1}{2a}\left\{\left[\left(-\frac{4a^2}{n\pi}\cos n\pi+\frac{2a^2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{4a^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right)-\left(-\frac{2a^2}{n\pi}\cos n\pi+\frac{2a^2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\right)\right]\right.\\&\quad+\left(-\frac{2a^2}{n\pi}\cos\frac{3n\pi}{2}+\frac{2a^2}{n\pi}\cos n\pi\right)+\left[\left(-\frac{8a^2}{n\pi}+\frac{8a^2}{n\pi}\cos\frac{3n\pi}{2}\right)\right.\\&\quad\left.\left.-\left(-\frac{8a^2}{n\pi}-\frac{6a^2}{n\pi}\cos\frac{3n\pi}{2}-\frac{4a^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{3n\pi}{2}\right)\right]\right\}\\&=\frac{2a}{n^2\pi^2}\left(\sin\frac{3n\pi}{2}-\sin\frac{n\pi}{2}\right)\\&=\begin{cases}0, & n=2k,\ k=1,2,3,\cdots,\\\dfrac{4a(-1)^{k+1}}{\pi^2(2k+1)^2}, & n=2k+1,\ k=0,1,2,3,\cdots.\end{cases}\end{aligned}$$

因此，按展开定理，注意到 $y(0)=y(4a)$，得 $y(s)$ 的傅里叶级数展开式为

$$y(s)=\frac{a}{2}-\frac{4a}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi s}{2a}+\frac{4a}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi s}{2a}\quad(0\leqslant s\leqslant 4a).$$

【2975】 应当如何把给定在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内的可积函数 $f(x)$ 延拓到区间 $(-\pi,\pi)$ 内，使得它展开成傅里叶级数后具有以下形式：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2n-1)x\quad(-\pi<x<\pi)?$$

提示 应有 $f(-x)=f(x)$，$f(\pi-x)=-f(x)$ $(-\pi<x<\pi)$.

解 由于展开式中无正弦项，故 $f(x)$ 延拓到 $(-\pi,\pi)$ 内应满足 $f(-x)=f(x)$. 函数 $f(x)$ 延拓到 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 的部分记以 $g(x)$，则按题设应有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}g(x)\cos 2nx\mathrm{d}x=0\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

在上式左端第一个积分中作代换 $\pi-x=y$，即得

$$-\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}f(\pi-y)\cos 2ny\mathrm{d}y+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}g(x)\cos 2nx\mathrm{d}x=0,$$

也即

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[f(\pi-x)+g(x)]\cos 2nx\mathrm{d}x=0\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

为要上式成立，显然只要求对于$(\frac{\pi}{2},\pi)$内任一 x 值，恒有

$$f(\pi-x)+g(x)=0,\quad 即\quad g(x)=-f(\pi-x).$$

总之，首先要在$(\frac{\pi}{2},\pi)$内定义一个函数，使它等于$-f(\pi-x)$；然后，再按偶函数延拓到$(-\pi,0)$，不妨将延拓到$(-\pi,\pi)$内的函数仍记为 $f(x)$，则由上述讨论知，必有

$$f(-x)=f(x),\quad f(\pi-x)=-f(x)\quad(-\pi<x<\pi).$$

【2976】 应当如何把给定在区间$(0,\frac{\pi}{2})$内的可积函数$f(x)$延拓到区间$(-\pi,\pi)$内，使得它展开成傅里叶级数后具有以下形式：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(2n-1)x\quad(-\pi<x<\pi)?$$

提示 应有 $f(-x)=-f(x)$，$f(\pi-x)=f(x)$ $(-\pi<x<\pi)$.

解 由于展开式中无余弦项，故 $f(x)$延拓到$(-\pi,\pi)$内应满足 $f(-x)=-f(x)$. 函数 $f(x)$延拓到$(\frac{\pi}{2},\pi)$的部分记以$g(x)$，则按题设应有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin 2nx\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}g(x)\sin 2nx\mathrm{d}x=0\quad(n=1,2,\cdots).$$

在上式左端第一个积分中作代换 $\pi-x=y$，即得

$$\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}f(\pi-y)\sin 2ny\mathrm{d}y+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}g(x)\sin 2nx\mathrm{d}x=0,$$

也即

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[-f(\pi-x)+g(x)]\sin 2nx\mathrm{d}x=0\quad(n=1,2,\cdots).$$

为要上式成立，显然只要求对于$(\frac{\pi}{2},\pi)$内任一 x 值，恒有

$$-f(\pi-x)+g(x)=0,\quad 即\ g(x)=f(\pi-x).$$

总之，首先要在$(\frac{\pi}{2},\pi)$内定义一个函数，使它等于 $f(\pi-x)$；然后，再按奇函数延拓到$(-\pi,\pi)$，不妨将延拓到$(-\pi,\pi)$内的函数仍记为 $f(x)$，则由上述讨论知，必有

$$f(-x)=-f(x),\quad f(\pi-x)=f(x)\quad(-\pi<x<\pi).$$

【2977】 在区间$(0,\frac{\pi}{2})$内把函数 $f(x)=x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$展开：(1)依角的奇倍数的余弦展开；(2)依角的奇倍数的正弦展开.

绘出情形(1)与(2)的傅里叶级数之和的图像.

提示 (1)利用 2975 题的结果，延拓函数，求出 $a_{2k+1}(k=0,1,2,\cdots)$.

(2)利用 2976 题的结果，延拓函数，求出 $b_{2k+1}(k=0,1,2,\cdots)$.

解 (1) 利用 2975 题的结果，延拓函数，使有 $f(-x)=f(x)$，$f(\pi-x)=-f(x)$. 于是，有

$$a_{2k+1}=\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos(2k+1)x\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[-f(\pi-x)]\cos(2k+1)x\mathrm{d}x\right\}.$$

若在上式右端第二个积分中令 $\pi-x=y$，则得到与第一个积分同样的结果，即

$$\begin{aligned}a_{2k+1}&=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos(2k+1)x\mathrm{d}x\\&=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos(2k+1)x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$=\frac{4}{(2k+1)\pi}x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin(2k+1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{4}{(2k+1)\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\sin(2k+1)x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{(2k+1)^2\pi}\left[\frac{\pi}{2}\cos(2k+1)x-2x\cos(2k+1)x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{8}{(2k+1)^2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2k+1)x\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2}{(2k+1)^2}+\frac{8}{(2k+1)^3\pi}\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$=-\frac{2}{(2k+1)^2}+\frac{8(-1)^k}{(2k+1)^3\pi}\qquad(k=0,1,2,\cdots).$$

于是，$f(x)$的展开式为

$$-2\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{(2k+1)^2}-\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}\right]\cos(2k+1)x\right\}$$

$$=x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\quad\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

其和的图像如图 5.8 所示.

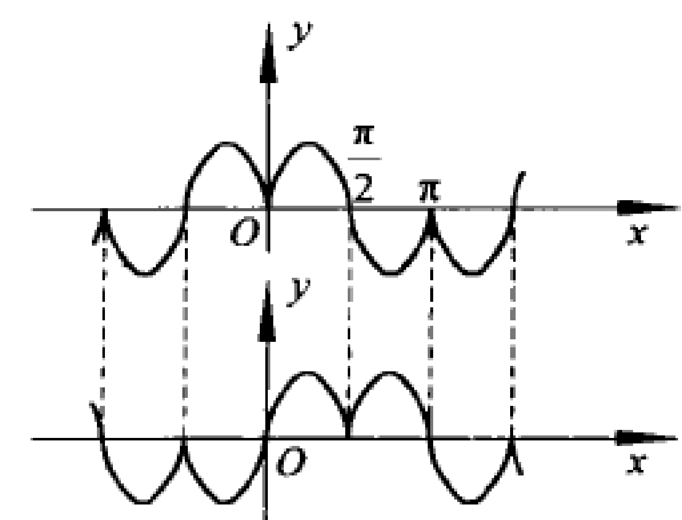


图 5.8

(2) 利用 2976 题的结果，延拓函数，使有

$$f(-x)=-f(x),\quad f(\pi-x)=f(x).$$

于是，有

$$b_{2k+1}=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin(2k+1)x\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(\pi-x)\sin(2k+1)x\mathrm{d}x\right].$$

若在上式右端第二个积分中令 $\pi-x=y$，则得到与第一个积分同样的结果，即

$$b_{2k+1}=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin(2k+1)x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin(2k+1)x\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{4}{(2k+1)\pi}x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos(2k+1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{4}{(2k+1)\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\cos(2k+1)x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{(2k+1)^2\pi}\left[\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\sin(2k+1)x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{8}{(2k+1)^2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2k+1)x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}+\frac{8}{(2k+1)^3\pi}\quad(k=0,1,2,\cdots).$$

于是，$f(x)$的展开式为

$$2\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}+\frac{4}{(2k+1)^3\pi}\right]\sin(2k+1)x\right\}=x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\quad\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

其和的图像如图 5.8 所示.

【2978】 设 $f(x)$是以为 π 周期的反周期函数，即 $f(x+\pi)=-f(x)$. 问此函数在区间$(-\pi,\pi)$内的傅里叶级数具有怎样的特性？

提示 $a_{2n}=0\ (n=0,1,2,\cdots)$，$b_{2n}=0\ (n=1,2,\cdots)$.

解 由于

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0}f(\pi+x)\cos nx\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\right]\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

故在上式右端第一个积分中令 $x+\pi=y$，则得

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[(-1)^{n+1}+1]f(x)\cos nx\mathrm{d}x.$$

于是，得 $a_{2n}=0\ (n=0,1,2,\cdots)$. 同理，可得 $b_{2n}=0\ (n=1,2,\cdots)$. 因此，函数 $f(x)$在$(-\pi,\pi)$内的傅里叶级数的特性为

$$a_{2n}=0\quad(n=0,1,2,\cdots),\qquad b_{2n}=0\quad(n=1,2,\cdots).$$

【2979】 设 $f(x+\pi)=f(x)$，则函数 $f(x)$在区间$(-\pi,\pi)$内的傅里叶级数具有怎样的特性？

提示 与 2978 题解法类似，$a_{2n-1}=b_{2n-1}=0\ (n=1,2,\cdots)$.

解 与 2978 题解法类似，我们可求得

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[(-1)^n+1]f(x)\cos nx\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

因此，有

$$a_{2n-1}=0 \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

同理，可求得

$$b_{2n-1}=0 \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

因此，函数 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内的傅里叶级数的特性为 $a_{2n-1}=b_{2n-1}=0 \quad (n=1,2,3,\cdots)$.

【2980】 对于一个周期为 2π 的函数 $y=f(x)$，若函数的图像：(1)以点 $(0,0)$，$(\pm\frac{\pi}{2},0)$ 为对称中心；(2)以坐标原点为对称中心并以 $x=\pm\frac{\pi}{2}$ 为对称轴；问其傅里叶系数 $a_n,b_n\ (n=1,2,3,\cdots)$ 具有怎样的特性？

提示 (1)$a_n=0\ (n=0,1,2,\cdots)$，$b_{2n-1}=0\ (n=1,2,3,\cdots)$； (2)$a_n=0\ (n=1,2,\cdots)$，$b_{2n}=0\ (n=1,2,3,\cdots)$.

解 (1) 由题设函数 $f(x)$ 满足

$$f(-x)=-f(x), \quad f(\pi-x)=-f(x).$$

因此，$a_n=0\ (n=0,1,2,\cdots)$，且

$$\begin{aligned} b_n &=\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin nx\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[-f(\pi-x)]\sin nx\mathrm{d}x\right\} \\ &=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin nx\mathrm{d}x+(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(y)\sin ny\mathrm{d}y\right] \\ &=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[1+(-1)^n]f(x)\sin nx\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

故 $b_{2n-1}=0\ (n=1,2,\cdots)$. 因此，$f(x)$ 的傅里叶级数的特性为

$$a_n=0\ (n=0,1,2,\cdots), \qquad b_{2n-1}=0\ (n=1,2,3,\cdots).$$

(2) 由题设函数 $f(x)$ 满足

$$f(-x)=-f(x), \quad f(\pi-x)=f(x).$$

同(1)一样，$a_n=0\ (n=0,1,2,\cdots)$，而

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[1+(-1)^{n+1}]f(x)\sin nx\mathrm{d}x,$$

故 $b_{2n}=0\ (n=1,2,3,\cdots)$. 因此，$f(x)$ 的傅里叶系数的特性为

$$a_n=0\ (n=0,1,2,\cdots), \qquad b_{2n}=0\ (n=1,2,3,\cdots).$$

【2981】 若函数 $\varphi(-x)\equiv\psi(x)$，问 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的傅里叶系数 a_n,b_n 与 $\alpha_n,\beta_n\ (n=0,1,2,\cdots)$ 之间有何关系？

提示 $a_n=\alpha_n\ (n=0,1,2,\cdots)$，$b_n=-\beta_n\ (n=1,2,3,\cdots)$.

解 函数 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 的傅里叶系数分别为

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nx\mathrm{d}x, \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin nx\mathrm{d}x;$$

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\cos nx\mathrm{d}x, \qquad \beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\sin nx\mathrm{d}x.$$

由于

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\varphi(x)\cos nx\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\varphi(x)\cos nx\mathrm{d}x\right],$$

故在上式右端两个积分中代作换 $-x=y$，并将 $\varphi(-x)=\psi(x)$ 代入，即得

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\psi(x)\cos nx\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{0}\psi(x)\cos nx\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\cos nx\mathrm{d}x=\alpha_n.$$

同理，有

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\varphi(x)\sin nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}\varphi(x)\sin nx\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{\pi}\left[-\int_{0}^{\pi}\psi(x)\sin nx\mathrm{d}x-\int_{-\pi}^{0}\psi(x)\sin nx\mathrm{d}x\right]$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\sin nx\mathrm{d}x=-\beta_n.$$

因此，$\varphi(x)$、$\psi(x)$的傅里叶系数 a_n、b_n 与 α_n、β_n 的关系为

$$a_n=\alpha_n(n=0,1,2,\cdots),\qquad b_n=-\beta_n(n=1,2,3,\cdots).$$

【2982】 若函数 $\varphi(-x)\equiv-\psi(x)$，问 $\varphi(x)$与 $\psi(x)$的傅里叶系数 a_n,b_n 与 $\alpha_n,\beta_n(n=0,1,2,\cdots)$之间有何关系？

提示 $a_n=-\alpha_n(n=0,1,2,\cdots)$，$b_n=\beta_n(n=1,2,3,\cdots)$.

解 函数 $\varphi(x)$，$\psi(x)$的傅里叶系数分别为

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nx\mathrm{d}x,\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin nx\mathrm{d}x;$$

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\cos nx\mathrm{d}x,\qquad \beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\sin nx\mathrm{d}x.$$

由于

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\varphi(x)\cos nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}\varphi(x)\cos nx\mathrm{d}x\right],$$

故在上式右端两个积分中作代换 $-x=y$，并将 $\varphi(-x)=-\psi(x)$代入，即得

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[-\int_{0}^{\pi}\psi(x)\cos nx\mathrm{d}x-\int_{-\pi}^{0}\psi(x)\cos nx\mathrm{d}x\right]=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\cos nx\mathrm{d}x=-\alpha_n.$$

同理，有 $b_n=\beta_n$. 因此，$\varphi(x)$、$\psi(x)$ 的傅里叶系数 a_n、b_n与α_n、β_n的关系为

$$a_n=-\alpha_n(n=0,1,2,\cdots),\qquad b_n=\beta_n(n=1,2,3,\cdots).$$

【2983】 已知周期为 2π 的可积函数 $f(x)$的傅里叶系数为 $a_n,b_n(n=0,1,2,\cdots)$，试计算“平移”后的函数 $f(x+h)$（h 为常数）的傅里叶系数 $\bar{a}_n,\bar{b}_n(n=0,1,2,\cdots)$.

提示 $\bar{a}_n=a_n\cos nh+b_n\sin nh$，$\bar{b}_n=b_n\cos nh-a_n\sin nh$.

解 在傅里叶系数 $\bar{a}_n$ 的表达式中作代换 $x+h=y$，并注意到 $f(x)$的周期性，即有

$$\bar{a}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+h)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h}f(y)[\cos nh\cos ny+\sin nh\sin ny]\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\cos nh\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\sin nh\mathrm{d}x\right]$$

$$=a_n\cos nh+b_n\sin nh.$$

同理，可求得 $\bar{b}_n=b_n\cos nh-a_n\sin nh$.

【2984】 已知周期为 2π 的可积函数 $f(x)$的傅里叶系数为 $a_n,b_n(n=0,1,2,\cdots)$，试计算斯捷克洛夫函数

$$f_h(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

的傅里叶系数 $A_n,B_n(n=0,1,2,\cdots)$.

提示 $A_0=a_0$，$A_n=a_n\dfrac{\sin nh}{nh}\ (n=1,2,\cdots)$；$B_n=b_n\dfrac{\sin nh}{nh}\ (n=1,2,\cdots)$.

解 由于

$$f_h(x+2\pi)=\frac{1}{2h}\int_{x+2\pi-h}^{x+2\pi+h}f(\xi)\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(\xi)\mathrm{d}\xi=f_h(x),$$

故 $f_h(x)$仍为以 2π 为周期的周期函数.

于是，有（作代换 $\xi=x+y$）

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_h(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi h}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x\int_{x-h}^{x+h}f(\xi)\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\pi h}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x\int_{-h}^{h}f(x+y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2\pi h}\int_{-h}^{h}\mathrm{d}y\int_{-\pi}^{\pi}f(x+y)\cos nx\mathrm{d}x.$$

根据 2983 题的结果可知

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)\cos nx\mathrm{d}x=a_n\cos ny+b_n\sin ny,$$

故 $$A_n=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}(a_n\cos ny+b_n\sin ny)\mathrm{d}y=\frac{a_n}{h}\int_0^h\cos ny\mathrm{d}y=\begin{cases}a_n, & n=0,\\ \dfrac{a_n\sin nh}{nh}, & n=1,2,3,\cdots.\end{cases}$$

即 $A_0=a_0$，$A_n=\dfrac{a_n\sin nh}{nh}$ $(n=1,2,3,\cdots)$. 同理可得 $B_n=\dfrac{b_n\sin nh}{nh}$ $(n=1,2,3,\cdots)$.

【2985】 设 $f(x)$是以 2π 为周期的连续函数，并且 a_n,b_n $(n=0,1,2,\cdots)$为其傅里叶系数. 求卷积函数

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\mathrm{d}t$$

的傅里叶系数 $A_n,B_n(n=0,1,2,\cdots)$.

利用所得的结果，推出李雅普诺夫等式.

提示 $A_0=a_0^2$，$A_n=a_n^2+b_n^2(n=1,2,3,\cdots)$；$b_n=0$ $(n=1,2,3,\cdots)$. 由此易得李雅普诺夫等式.

解 由于 $$F(x+2\pi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+2\pi+t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\mathrm{d}t=F(x),$$

故 $F(x)$仍为以 2π 为周期的函数. 于是，有

$$\begin{aligned}
A_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t\int_{-\pi+t}^{\pi+t}f(\xi)\mathrm{d}\xi\\
&=\frac{1}{\pi^2}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t\right]^2=a_0^2,\\
A_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cos nx\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t\int_{-\pi+t}^{\pi+t}f(\xi)(\cos n\xi\cos nt+\sin n\xi\sin nt)\mathrm{d}\xi\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[a_nf(t)\cos nt+b_nf(t)\sin nt]\mathrm{d}t=a_n^2+b_n^2\quad(n=1,2,3,\cdots);\\
B_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\sin nx\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t\int_{-\pi+t}^{\pi+t}f(\xi)(\sin n\xi\cos nt-\cos n\xi\sin nt)\mathrm{d}\xi\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[b_nf(t)\cos nt-a_nf(t)\sin nt]\mathrm{d}t=b_na_n-a_nb_n=0\quad(n=1,2,3,\cdots).
\end{aligned}$$

由 $f(x)$的连续性知，$F(x)$不仅以 2π 为周期而且是连续函数，故按展开定理，注意到 $B_n=0$ $(n=1,2,3,\cdots)$，即得

$$F(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx.$$

因此，特别地，有 $$F(0)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n.$$

但已知 $A_0=a_0^2$，$A_n=a_n^2+b_n^2$，且

$$F(0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(0+t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)\mathrm{d}t,$$

故得 $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

这就是李雅普诺夫等式.

§7. 级数求和法

1° **直接求和法** 若 $u_n=v_{n+1}-v_n \quad (n=1,2,\cdots)$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=v_\infty$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=v_\infty-v_1.$$

特别地，若 $u_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}\cdots a_{n+m}}$，其中数 $a_i \quad (i=1,2,\cdots)$ 组成以 d 为公差的等差数列，则

$$v_n=-\frac{1}{md}\cdot\frac{1}{a_na_{n+1}\cdots a_{n+m-1}}.$$

在某些情形下，未知级数能表示为下列已知级数的线性组合：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2;\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12},$$

等等.

2° **阿贝尔方法** 若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛，则

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\lim_{x\to1-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

在最简单的例子中，借助于逐项微分法或积分法来求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和.

3° **三角级数求和法** 为了求级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx \quad 及 \quad \sum_{n=0}^{\infty}a_n\sin nx$$

的和，通常把前者视为复数域内的幂级数：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$（其中 $z=e^{ix}$）的和的实部，而把后者视为该幂级数的和的虚部的系数.

在许多情形下级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\ln\frac{1}{1-z} \quad (|z|<1)$$

是有用的.

求下列级数的和：

【2986】 $\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot7}+\cdots.$

提示 注意 $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right).$

解 由 $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$，得

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$$
$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2N+1}\right)=\frac{1}{2}.$$

【2987】 $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\dfrac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots.$

提示 注意 $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$，并利用 2549 题的结果.

解 由 $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$，并注意到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}=1$[*]，即得

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\cdots$$
$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{N+1}\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{2}\right]$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

*) 利用 2549 题的结果.

【2988】 $\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}-\frac{1}{4\cdot5}+\cdots.$

解 $\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}-\frac{1}{4\cdot5}+\cdots$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{2\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right]+(-1)^{n+2}\frac{1}{n+1}-1\right\}=2\ln2-1.$$

【2989】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$

提示 注意 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\frac{2}{n+3}=\frac{3n+5}{(n+1)(n+2)(n+3)}$，并利用 2987 题的结果.

解 由于$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\frac{2}{n+3}=\frac{3n+5}{(n+1)(n+2)(n+3)}$,故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\frac{2}{n+3}\right)-\frac{5}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)-\frac{5}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\right)^{*)}=\frac{1}{4}.$$

*) 利用 2987 题的结果.

【2990】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}$ （m 为正整数).

解 由$\frac{1}{n(n+m)}=\frac{1}{m}(\frac{1}{n}-\frac{1}{m+n})$,考虑适当大的正整数 N,并令 $N\to\infty$,即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+m)}=\frac{1}{m}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m}\right)$$
$$=\frac{1}{m}\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}-\cdots-\frac{1}{N+m}\right)$$
$$=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right).$$

【2991】 $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6\cdot7}+\cdots.$

解 由$\frac{1}{(2n-1)2n(2n+1)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(2n-1)2n}-\frac{1}{2n(2n+1)}\right]$,得

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)2n(2n+1)}+\cdots$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}-\frac{1}{5\cdot6}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)2n}-\frac{1}{2n(2n+1)}+\cdots\right]$$
$$=\frac{1}{2}(2\ln2-1)^{*)}=\ln2-\frac{1}{2}.$$

*) 注意原级数的绝对收敛性,并利用 2988 题的结果.

【2992】 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}.$

解 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}=\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=2}^{N}\frac{1}{n^2-1}=\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=2}^{N}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}\lim\limits_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{N+1}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}.$$

【2993】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

解 由$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}-\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)^{*)}=1.$$

*) 所写级数均为绝对收敛级数，并利用 2961 题的结果(或本节前言).

【2994】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}$.

提示 利用 146 题的结果.

解 由$\frac{1}{n(2n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{2}{2n+1}$，得

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(2n+1)}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n+1}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-2\left(\sum_{n_1=1}^{2N+1}\frac{1}{n_1}-\frac{1}{2}\sum_{n_2=1}^{N}\frac{1}{n_2}-1\right)$$

$$=(C+\ln N+\varepsilon_1)-2\left[(C+\ln(2N+1)+\varepsilon_2)-\frac{1}{2}(C+\ln N+\varepsilon_3)-1\right]^{*)}$$

$$=2\ln\frac{N}{2N+1}+\alpha+2,$$

其中 $\varepsilon_1\to0,\varepsilon_2\to0,\varepsilon_3\to0,\alpha=\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_3\to0$(当 $N\to\infty$). 于是，

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(2n+1)}=2\ln\frac{1}{2}+2=2(1-\ln2),$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}=2(1-\ln2)$.

*) 利用 146 题的结果.

【2995】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$.

解 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{n^2}{n!}=\lim\limits_{N\to\infty}\left\{1+2+\sum\limits_{n=3}^{N}\frac{n^2}{n!}\right\}=\lim\limits_{N\to\infty}\left\{3+\sum\limits_{n=3}^{N}\left[\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-2)!}\right]\right\}$

$$=\lim_{N\to\infty}\left\{3+\sum_{k=2}^{N-1}\frac{1}{k!}+\sum_{l=1}^{N-2}\frac{1}{l!}\right\}=\lim_{N\to\infty}\left\{2\left(1+\sum_{s=1}^{N}\frac{1}{s!}\right)+O\left(\frac{1}{N}\right)\right\}=2e.$$

【2996】 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}$.

解 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n-1)!}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}=2\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{2^m}{m!}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}=3\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$.

利用级数运算的性质可知，对于绝对收敛的级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$，有下述等式：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}=\sum_{n=0}^{\infty}d_n,$$

其中 $d_n=\sum\limits_{k+l=n}\frac{1}{k!l!}=\frac{1}{n!}\sum\limits_{k+l=n}\frac{n!}{k!l!}=\frac{1}{n!}\sum\limits_{s=0}^{n}C_n^s=\frac{2^n}{n!}$，故得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}=\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\right)^2=e^2$，因此，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}=3e^2.$$

【2997】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2}$.

提示 注意$\frac{1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{2}{n(n+1)}$，并利用 2549 题及 2961 题的结果.

解 由$\frac{1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{2}{n(n+1)}$，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{\pi^2}{6}+\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)-2^{*)}=\frac{\pi^2}{3}-3.$$

*) 所写级数均为绝对收敛级数，并利用 2549 题及 2961 题的结果.

【2998】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}$.

解 首先，注意到

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}-\frac{2}{n^2}+\frac{6}{n(n+1)(n+2)}=-\frac{3}{(n+1)^2(n+2)^2}-\frac{12n+8}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}, \tag{1}$$

$$2\left[\frac{1}{n^2(n+1)^2}+\frac{1}{n^2(n+2)^2}-\frac{2}{(n+1)^2(n+2)^2}\right]=\frac{12n+10}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}, \tag{2}$$

$$\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+2)^2}-\frac{2}{n(n+2)}=\frac{4}{n^2(n+2)^2} \tag{3}$$

将(1)、(2)、(3)三式相加，合并整理可得

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(n+2)^2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n(n+2)}+\frac{6}{n(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}+\frac{2}{n^2(n+1)^2}$$
$$=\frac{2}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}.$$

其次，先后利用 2961 题、2990 题、2987 题和 2997 题的结果，即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^2}-\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}+6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right.$$
$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{\pi^2}{6}-1-\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+6\cdot\frac{1}{4}-\left(\frac{\pi^2}{3}-3-\frac{1}{4}\right)+2\left(\frac{\pi^2}{3}-3\right)\right\}$$
$$=\frac{\pi^2}{4}-\frac{39}{16}.$$

【2999】 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$.

解 注意到

$$-\frac{1}{3!}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right),\quad \frac{2}{5!}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right),\quad\cdots\quad \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}=\frac{(-1)^n}{2}\left[\frac{1}{(2n)!}-\frac{1}{(2n+1)!}\right],\quad\cdots$$

相加即得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}-\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}+\cdots\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right]^{*)}=\frac{1}{2}(\cos1-\sin1).$$

*) 由于级数绝对收敛，从而其和与项相加的顺序无关.

【3000】$^{+}$ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$.

解 考虑部分和

$$S_N=\sum_{n=2}^{N}\frac{(-1)^n}{n^2+n-2}=\sum_{n=2}^{N}\frac{(-1)^n}{3}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}+\frac{1}{3}\sum_{l=4}^{N+2}\frac{(-1)^{l+1}}{l}$$

$$=\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{k-1}}{k}+\frac{1}{3}\left(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+O\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{k-1}}{k}-\frac{5}{18}+O\left(\frac{1}{N}\right)=\frac{2}{3}\ln 2-\frac{5}{18}+O\left(\frac{1}{N}\right),$$

故得 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+n-2}=\lim_{N\to\infty}S_N=\frac{2}{3}\ln 2-\frac{5}{18}=\frac{1}{18}(12\ln 2-5)$.

【3001】 设 $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P(n)}{n!}x^n$ 的和.

解 令 $P(n)=a_0+a_1n+\cdots+a_mn^m\equiv\alpha_0+\alpha_1n+\cdots+\alpha_mn(n-1)\cdots(n-m+1)$,

其中 $\alpha_i(i=0,1,\cdots,m)$ 可由上述恒等式求出,则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P(n)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_0+\alpha_1n+\cdots+\alpha_mn(n-1)\cdots(n-m+1)}{n!}x^n$$

$$=\alpha_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+\alpha_1x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots+\alpha_mx^m\sum_{n=m}^{\infty}\frac{x^{n-m}}{(n-m)!}$$

$$=\alpha_0e^x+\alpha_1xe^x+\cdots+\alpha_mx^me^x=e^x(\alpha_0+\alpha_1x+\cdots+\alpha_mx^m).$$

求下列级数的和:

【3002】 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^nn!}x^n$.

解 对于任意的 x,考虑部分和

$$S_N=\sum_{n=0}^{N}\frac{n^2+1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n=1+2\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{5}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\sum_{n=3}^{N}\left[\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}\right]\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

$$=\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k\right]+\left[\left(\frac{x}{2}\right)+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{l=2}^{N}\frac{1}{l!}\left(\frac{x}{2}\right)^l\right]$$

$$+\left[1+\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]+O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

$$=\left(\frac{x}{2}\right)^2\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k+\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{l=0}^{N}\frac{1}{l!}\left(\frac{x}{2}\right)^l+\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

$$=\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)+1\right]\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+O\left(\frac{1}{N^2}\right),$$

故得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\lim_{N\to\infty}S_N=\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}\right)e^{\frac{x}{2}}.$$

【3003】 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nn^3}{(n+1)!}x^n$.

提示 注意 $\frac{n^3}{(n+1)!}=\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$.

解 由 $\frac{n^3}{(n+1)!}=\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$,得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nn^3}{(n+1)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}(-x)^n$$

$$=\frac{1}{2}(-x)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^n}{(n-2)!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^n}{(n+1)!}$$

$$=-\frac{x}{2}+x^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^{n-2}}{(n-2)!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}+\frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$=-\frac{x}{2}+x^2e^{-x}+(e^{-x}-1+x)+\frac{1}{x}\left(e^{-x}-1+x-\frac{x^2}{2!}\right)$$

$$=\mathrm{e}^{-x}\left(x^2+1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}.$$

【3004】 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n^2+1)}{(2n)!}x^{2n}$.

解 由$\frac{2n^2+1}{(2n)!}=\frac{1}{2}\frac{1}{(2n-2)!}+\frac{1}{2}\frac{1}{(2n-1)!}+\frac{1}{(2n)!}$,得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n^2+1)}{(2n)!}x^{2n}=1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-2)!}x^{2n}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

$$=1-\frac{x^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}x^{2n-2}-\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}-1$$

$$=1-\frac{x^2}{2}\cos x-\frac{x}{2}\sin x+\cos x-1=\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\cos x-\frac{x}{2}\sin x.$$

【3005】 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^n}{(2n+1)!}$.

解 (1) 若 $x=0$,则级数的和显然为零.

(2) 若 $x>0$,记 $t=\sqrt{x}$. 考虑部分和,并注意:当任意固定 x 时,某些常见幂级数的收敛性,下述记号 $o(1)$是指当 $N\to\infty$时的无穷小量. 于是,有

$$S_N=\sum_{n=0}^{N}\frac{n^2t^{2n}}{(2n+1)!}=\frac{1}{4t}\sum_{n=0}^{N}\frac{(2n)^2-1}{(2n+1)!}t^{2n+1}+\frac{1}{4t}\sum_{n=0}^{N}\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$=\frac{1}{4t}\sum_{n=0}^{N}\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n+1)!}t^{2n+1}+\frac{1}{4t}\operatorname{sh}t+o(1)$$

$$=\frac{1}{4t}\left[t^2\sum_{n=1}^{N}\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}-t\sum_{n=0}^{N}\frac{t^{2n}}{(2n)!}\right]+\frac{1}{4t}\operatorname{sh}t+o(1)$$

$$=\frac{1}{4t}[t^2\operatorname{sh}t-t\operatorname{ch}t+o(1)]+\frac{1}{4t}\operatorname{sh}t+o(1)=\frac{1}{4}\left(\frac{t^2+1}{t}\operatorname{sh}t-\operatorname{ch}t\right)+o(1)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\operatorname{sh}\sqrt{x}-\operatorname{ch}\sqrt{x}\right)+o(1).$$

因此,当 $x>0$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^n}{(2n+1)!}=\lim\limits_{N\to\infty}S_N=\frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\operatorname{sh}\sqrt{x}-\operatorname{ch}\sqrt{x}\right)$.

(3) 若 $x<0$,记 $y=\sqrt{|x|}$,则 $x=-y^2$. 与上述讨论类似,有

$$S_N=\sum_{n=0}^{N}\frac{n^2(-1)^ny^{2n}}{(2n+1)!}=\frac{1}{4y}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n[(2n)^2-1]}{(2n+1)!}y^{2n+1}+\frac{1}{4y}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^ny^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$=\frac{1}{4y}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n(2n-1)(2n+1)}{(2n+1)!}y^{2n+1}+\frac{1}{4y}\sin y+o(1)$$

$$=\frac{1}{4y}\left[y^2\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^ny^{2n-1}}{(2n-1)!}-y\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^ny^{2n}}{(2n)!}\right]+\frac{1}{4y}\sin y+o(1)$$

$$=\frac{1}{4y}[-y^2\sin y-y\cos y+o(1)]+\frac{1}{4y}\sin y+o(1)=\frac{1}{4}\left(\frac{-y^2+1}{y}\sin y-\cos y\right)+o(1)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{\sqrt{|x|}}\sin\sqrt{|x|}-\cos\sqrt{|x|}\right)+o(1).$$

因此,当 $x<0$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^n}{(2n+1)!}=\lim\limits_{N\to\infty}S_N=\frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{\sqrt{|x|}}\sin\sqrt{|x|}-\cos\sqrt{|x|}\right)$.

利用逐项微分法求级数的和:

【3006】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

解 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$,故收敛半径为 1. 当$x=1$ 时,级数发散;当 $x=-1$ 时,级数收敛. 因

此，级数的收敛域为$[-1,1)$.

当 $x\in[-1,1)$时，令 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. 当$|x|<1$ 时，逐项微分之，得

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}.$$

由于 $f(0)=0$，故得

$$f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t}=\ln\frac{1}{1-x}\quad(|x|<1).\tag{1}$$

由上述幂级数在 $x=-1$ 的收敛性，且其和为$-\ln2=\ln\frac{1}{2}$，利用阿贝尔定理知，上述结果(1)当$-1\leqslant x<1$ 时成立.

【3007】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$.

解 由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{n(2n-1)}=1$，故收敛半径为 1. 当$|x|=1$ 时，级数绝对收敛. 因此，级数的收敛域为$[-1,1]$.

当 $x\in[-1,1]$时，令 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$. 当$|x|<1$ 时，逐项微分之，得

$$f'(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}=2\arctan x^{*)}.$$

由于 $f(0)=0$，故得

$$f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=2\int_0^x\arctan t\mathrm{d}t=2x\arctan x-2\int_0^x\frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t=2x\arctan x-\ln(1+x^2).\tag{1}$$

当$|x|=1$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=2\cdot\frac{\pi}{4}^{**)}-\ln2=\frac{\pi}{2}-\ln2,$$

利用阿贝尔定理知，上述结果(1)包括端点在内也成立，即当$-1\leqslant x\leqslant1$ 时，(1)式成立.

*) 利用 2907 题的结果.

**) 利用 2938 题的结果.

【3008】 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$.

解 由于$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+5}{4n+1}=1$，故收敛半径为 1. 当$|x|=1$时，级数发散. 因此，级数的收敛域为$(-1,1)$.

当 $x\in(-1,1)$时，令 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$. 逐项微分之，得 $f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}=\frac{1}{1-x^4}$. 由于 $f(0)=0$，故得

$$f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t^4}=\frac{1}{2}\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x\quad(|x|<1).$$

【3009】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d\cdot2d\cdots nd}x^n\quad(d>0)$.

提示 用$(1-x)$去乘级数的导数，得一阶线性微分方程并求其解.

解 首先，应设

$$a\neq-md\quad(m=0,1,2,\cdots),$$

因为否则，若 $a=-md$(m—某正整数或零)，则原级数从$m+1$项开始恒为零，此时原级数为一多项式

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d\cdot2d\cdots nd}x^n,$$

它对任何 x 均收敛.

令 $a_n=\frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d\cdot2d\cdots nd}$ $(n=1,2,3,\cdots)$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)d}{a+nd}=1,$$

故收敛半径为 1. 以下先设 $|x|<1$ 求原级数的和，最后再考虑端点 $x=\pm 1$ 时的情形.

当 $x\in(-1,1)$ 时，令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d\cdot 2d\cdots nd}x^n.$$

逐项微分之，得

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d\cdot d\cdot 2d\cdots(n-1)d}x^{n-1}.$$

以 $(1-x)$ 乘上式两端，得

$$(1-x)f'(x)=\frac{a}{d}+\frac{a}{d}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d\cdot 2d\cdots nd}x^n=\frac{a}{d}+\frac{a}{d}f(x),$$

上述方程系一阶线性微分方程：

$$f'(x)-\frac{a}{d}\cdot\frac{1}{1-x}f(x)=\frac{a}{d}\cdot\frac{1}{1-x}.$$

解之，得

$$f(x)=C(1-x)^{-\frac{a}{d}}-1\quad(-1<x<1),$$

其中 C 为常数. 由于 $f(0)=0$，故得 $0=C-1$，即 $C=1$. 于是，当 $|x|<1$ 时，

$$f(x)=(1-x)^{-\frac{a}{d}}-1. \tag{1}$$

最后，考虑端点 $x=\pm 1$ 的情形，先考虑 $x=1$. 此时原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. 由于当 n 充分大时，$a+nd>0$，故

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(d-a)n}{a+nd}=\frac{d-a}{d}.$$

于是，根据拉比判别法可知，当 $a<0$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，当 $a>0$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散；但当 $a>0$ 时，$a_n>0$. 由此可知：当 $a<0$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，当 $a>0$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

再考虑 $x=-1$. 此时原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. 当 $a<0$ 时，前面已证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛. 下设 $a>0$，若 $a\geqslant d$，则

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(n+1)d}{a+nd}\leqslant 1,$$

故

$$a_{n+1}\geqslant a_n>0\quad(n=1,2,\cdots).$$

于是，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 的通项不趋于零，因此，它发散. 下设 $0<a<d$. 于是，有

$$\ln a_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\left[\frac{a+(k-1)d}{kd}\right]=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{d-a}{kd}\right). \tag{2}$$

由于 $0<a<d$，故 $\ln(1-\frac{d-a}{kd})<0$ $(k=1,2,3,\cdots)$. 注意到

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{d-a}{kd}\right)}{-\frac{d-a}{kd}}=1,$$

而级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ 发散，即知级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{d-a}{kd}\right)$ 发散，从而(它的每一项都是负的)，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{d-a}{kd}\right)=-\infty.$$

于是，根据(2)式即知$\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n=-\infty$，从而，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0. \tag{3}$$

另外，因 $0<a<d$，有$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{(n+1)d}{a+nd}>1$，故

$$a_n>a_{n+1}>0 \quad (n=1,2,3,\cdots). \tag{4}$$

于是，由(3)式及(4)式，根据莱布尼茨判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.

综上所述，并根据幂级数的阿贝尔定理，即知：当 $a<0$ 时，原幂级数的收敛域为$-1\leqslant x\leqslant 1$，且在其上，公式(1)成立；当$0<a<d$时，原幂级数的收敛域为$-1\leqslant x<1$，且在其上，公式(1)成立；当 $a\geqslant d$ 时，原幂级数的收敛域为$-1<x<1$，且在其上，公式(1)成立.

【3010】 $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x}{2}\right)+\dfrac{1\cdot 4}{3\cdot 6}\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+\dfrac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}\left(\dfrac{x}{2}\right)^3+\cdots$.

提示 用$\left(1-\dfrac{x}{2}\right)$去乘级数的导数，并仿 3009 题.

解 记 $a_n=\dfrac{1\cdot 4\cdots(3n-2)}{3\cdot 6\cdots 3n}\cdot\dfrac{1}{2^n}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2(3n+3)}{3n+1}=2,$$

故收敛半径为 2. 先对$|x|<2$ 求级数的和，然后再考虑端点$x=\pm 2$的情况.

当 $x\in(-2,2)$时，令 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot 4\cdots(3n-2)}{3\cdot 6\cdots 3n}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n$. 逐项微分之，得

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdots(3n-2)}{3\cdot 3\cdot 6\cdots(3n-3)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}.$$

以$\left(1-\dfrac{x}{2}\right)$乘上式两端，得

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)f'(x)=\frac{1}{6}f(x)+\frac{1}{6}.$$

上述方程系一阶线性方程

$$f'(x)-\frac{1}{6\left(1-\frac{x}{2}\right)}f(x)=\frac{1}{6\left(1-\frac{x}{2}\right)}.$$

解之，得

$$f(x)=C\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}-1 \quad (-2<x<2).$$

由于 $f(0)=0$，故得 $0=C-1$，即 $C=1$. 于是，当$-2<x<2$ 时，有

$$f(x)=\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}-1. \tag{1}$$

最后考虑端点 $x=\pm 2$ 的情况，先考虑 $x=2$，此时原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$，其中 $b_n=\dfrac{1\cdot 4\cdots(3n-2)}{3\cdot 6\cdots 3n}$ $(n=1,2,\cdots)$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n+1}=\frac{2}{3}<1.$$

故由拉比判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散.

再考虑 $x=-2$，此时原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$. 由于$\dfrac{b_n}{b_{n+1}}=\dfrac{3n+3}{3n+1}>1$，故

$$b_n>b_{n+1}>0 \quad (n=1,2,3,\cdots). \tag{2}$$

另外，

$$\ln b_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{3k-2}{3k}=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{2}{3k}\right).$$

由于 $\ln(1-\frac{2}{3k})<0\ (k=1,2,3,\cdots)$，且

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{2}{3k}\right)}{-\frac{2}{3k}}=1,$$

而级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ 发散，故级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln(1-\frac{2}{3k})$ 发散，并且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln(1-\frac{2}{3k})=-\infty$. 于是，$\lim\limits_{n\to\infty}\ln b_n=-\infty$，从而有

$$\lim_{n\to\infty}b_n=0. \tag{3}$$

由(2)式及(3)式，根据莱布尼茨判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ 收敛.

综上所述，并利用幂级数的阿贝尔定理，即知：原幂级数的收敛域为 $-2\leqslant x<2$，且在其上，公式(1)成立.

利用逐项积分法求级数的和：

【3011】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$.

解题思路 易知级数的收敛域为$(-1,1)$. 当 $x\in(-1,1)$ 时，令 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$. 逐项积分之，并利用 2911 题的结果，可得

$$\int_0^x f(t)\,dt=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

于是，当 $|x|<1$ 时，$f(x)=\left[\frac{x}{(1-x)^2}\right]'=\frac{1+x}{(1-x)^3}$.

解 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1$，故收敛半径为 1. 当 $|x|=1$ 时，由于 $n^2\to\infty$，故级数发散. 因此，级数的收敛域为$(-1,1)$.

当 $x\in(-1,1)$ 时，令 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$. 逐项积分之，得

$$\int_0^x f(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n^2t^{n-1}\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}{}^{*)}.$$

于是，当 $|x|<1$ 时，$f(x)=\left[\frac{x}{(1-x)^2}\right]'=\frac{1+x}{(1-x)^3}$.

*) 利用 2911 题的结果.

【3012】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^n$.

解题思路 易知级数的收敛域为$(-1,1)$. 当 $x\in(-1,1)$ 时，令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^{n-1}=xg(x),$$

其中 $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^{n-1}$. 对后一级数逐项积分，并利用 2911 题的结果，可得

$$\int_0^x g(t)\,dt=\frac{3x-2x^2}{(1-x)^2}.$$

于是，当 $|x|<1$ 时，有 $g(x)=\left[\frac{3x-2x^2}{(1-x)^2}\right]'=\frac{3-x}{(1-x)^3}$.

解 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)}=1$，故收敛半径为 1. 当 $|x|=1$ 时，由于 $n(n+2)\to\infty$，故级数发散. 因此，级数的收敛域为$(-1,1)$.

当 $x\in(-1,1)$时，令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^{n-1}=xg(x),$$

其中 $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^{n-1}$. 由于

$$G(x)=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+2)\int_0^x t^{n-1}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n+2\sum_{n=1}^{\infty}x^n$$
$$=\frac{x}{(1-x)^2}{}^{*)}+\frac{2x}{1-x}=\frac{3x-2x^2}{(1-x)^2},$$

故 $g(x)=[G(x)]'=\left[\dfrac{3x-2x^2}{(1-x)^2}\right]'=\dfrac{3-x}{(1-x)^3}$. 因此，当 $|x|<1$ 时，$f(x)=xg(x)=\dfrac{x(3-x)}{(1-x)^3}$.

*） 利用 2911 题的结果.

【3013】 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$.

解题思路 易知级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$. 下仿 3011 题的解法.

解 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(2n+1)}{2n+3}=+\infty$，故级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

当 $x\in(-\infty,+\infty)$时，令 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$. 逐项积分之，得

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{(2n+1)t^{2n}}{n!}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}=xe^{x^2}.$$

于是，当$|x|<+\infty$时，$f(x)=(xe^{x^2})'=e^{x^2}(1+2x^2)$.

注 本题也可直接求级数的和. 事实上，

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}\right]x^{2n}=1+2x^2e^{x^2}+(e^{x^2}-1)=e^{x^2}(1+2x^2).$$

对于本题，还可用逐项微分法求级数的和. 事实上，

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(2n+1)}{(n-1)!}x^{2n-1}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[2(n-1)+1]+2}{(n-1)!}x^{2(n-1)+1}$$
$$=2x\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2m+1}{m!}x^{2m}+4x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x^2)^k}{k!}=2xf(x)+4xe^{x^2},$$

解一阶线性微分方程 $f'(x)-2xf(x)=4xe^{x^2}$，得 $f(x)=e^{x^2}(2x^2+C)$. 由于 $f(0)=1$，故得 $1=1(2\cdot0+C)$，即 $C=1$，于是，当 $x\in(-\infty,+\infty)$时，$f(x)=e^{x^2}(2x^2+1)$.

利用阿贝尔方法，求下列级数的和：

【3014】 $1-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{10}+\cdots$.

解题思路 易知级数 $x-\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^7}{7}-\dfrac{x^{10}}{10}+\cdots$的收敛域为$(-1,1]$. 当$|x|<1$ 时，令

$$f(x)=x-\frac{x^4}{4}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^{10}}{10}+\cdots,$$

逐项微分之，可得 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^3}$. 注意到 $f(0)=0$，并利用 1881 题的结果，可得

$$f(x)=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

利用阿贝尔定理，即易获解.

解 易知级数 $x-\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^7}{7}-\dfrac{x^{10}}{10}+\cdots$的收敛域为$(-1,1]$. 当$|x|<1$ 时，令

$$f(x)=x-\frac{x^4}{4}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^{10}}{10}+\cdots$$

逐项微分之，得

$$f'(x)=1-x^3+x^6-x^9+\cdots=\frac{1}{1+x^3}.$$

由于 $f(0)=0$，故有

$$f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}^{*)}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\quad(-1<x<1).$$

由阿贝尔定理，即得 $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots=\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=f(1)=\frac{1}{3}\ln2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

*) 利用 1881 题的结果.

【3015】 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$.

提示 利用 2907 题的结果.

解 级数 $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$ 的收敛域为[-1,1]，利用 2907 题的结果知，当 $x\in(-1,1)$ 时，有 $\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$. 由阿贝尔定理，即得

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\lim_{x\to1-0}\arctan x=\arctan1=\frac{\pi}{4}.$$

【3016】 $1-\frac{1}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}+\cdots$.

提示 利用 2910 题的结果(将其中的 x 换成 $-x$).

解 级数

$$1-\frac{x}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\cdots$$

的收敛域为(-1,1]. 利用 2910 题的结果(将 x 换成 $-x$)或利用基本展开式Ⅳ(其中 $m=-\frac{1}{2}$)知，当 $x\in(-1,1)$ 时，有 $\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\cdots$. 由阿贝尔定理，即得

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}+\cdots=\lim_{x\to1-0}\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

【3017】 $1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{5}+\cdots$.

提示 利用 2870 题的结果.

解 级数 $x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}+\cdots$ 的收敛域为[-1,1]. 利用 2870 题的结果知，当 $x\in(-1,1)$ 时，有 $\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}+\cdots$. 由阿贝尔定理，即得

$$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{5}+\cdots=\lim_{x\to1-0}\arcsin x=\frac{\pi}{2}.$$

求下列三角级数的和：

【3018】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$.

解 注意到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\ln\frac{1}{1-z}$，其中 $z=e^{ix}$，以及

$$\ln\frac{1}{1-z}=-\ln(1-\cos x-\mathrm{i}\sin x)=-\frac{1}{2}\ln(2-2\cos x)+\mathrm{i}\arctan\frac{\sin x}{1-\cos x}^{*)}$$

$$=-\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|+\mathrm{i}\arctan\frac{\sin x}{1-\cos x}\qquad(1)$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}+\mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},\tag{2}$$

比较(1),(2)两式实数部分及虚数部分,即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}=-\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|\quad(0<x<2\pi),\tag{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\arctan\frac{\sin x}{1-\cos x}=\arctan\left(\cot\frac{x}{2}\right)=\arctan\left(\tan\frac{\pi-x}{2}\right)=\frac{\pi-x}{2}\quad(0<x<2\pi).$$

*) 其中用到 $\ln z=\ln(|z|e^{i\arg z})=\ln|z|+i\arg z$. 若 $z=x+iy$, 则 $\ln|z|=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, 而 $\arg z=\arctan\frac{y}{x}$.

【3019】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$.

解 参看 3018 题中的结果(3).

【3020】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha\sin nx}{n}$.

解 利用积化和差公式及 3019 题的结果,即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha\sin nx}{n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(x-\alpha)}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(x+\alpha)}{n}$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|2\sin\frac{x-\alpha}{2}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|2\sin\frac{x+\alpha}{2}\right|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin\frac{x+\alpha}{2}}{\sin\frac{x-\alpha}{2}}\right|,$$

上式的存在域为 $0<x-\alpha<2\pi$ 及 $0<x+\alpha<2\pi$ 的公共部分,可视 α 之正负号而定:当 $\alpha>0$ 时为 $\alpha<x<2\pi-\alpha$;当 $\alpha<0$ 时为 $-\alpha<x<2\pi+\alpha$.

【3021】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha\sin nx}{n}\quad\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

解 利用半角公式、积化和差公式以及 3018 题的结果,即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha\sin nx}{n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\alpha\sin nx}{n}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(x+2\alpha)}{n}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(x-2\alpha)}{n}.$$

下面分三种情况求此级数的和 S:

(1) 取 $0<x<2\pi$, $0<x-2\alpha<2\pi$ 与 $0<x+2\alpha<2\pi$ 的公共部分,即 $2\alpha<x<2\pi-2\alpha$. 此时,级数的和为

$$S=\frac{\pi-x}{4}-\frac{\pi-(x+2\alpha)}{8}-\frac{\pi-(x-2\alpha)}{8}=0.$$

(2) 当 $0<x<2\alpha$ 时,$S=\frac{\pi-x}{4}-\frac{\pi-(x+2\alpha)}{8}+\frac{\pi-(2\alpha-x)}{8}=\frac{\pi}{4}$.

(3) 当 $2\pi-2\alpha<x<2\pi$ 时,$S=\frac{\pi-x}{4}-\frac{\pi-(x+2\alpha-2\pi)^{*)}}{8}-\frac{\pi-(x-2\alpha)}{8}=-\frac{\pi}{4}$.

*) 由于 $2\pi<x+2\alpha<3\pi$,故可令 $x+2\alpha=2\pi+\theta\ (0<\theta<\pi)$,则有 $\sin n(x+2\alpha)=\sin n(2\pi+\theta)=\sin n\theta$,从而以 $\theta=x+2\alpha-2\pi$ 代替 3018 题的结果中的 x 即可.

【3022】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$.

解 记 $I(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$,利用 3018 题的结果,有

$$I(x)=(\operatorname{sgn}x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n|x|}{n}=(\operatorname{sgn}x)\frac{\pi-|x|}{2}\quad(|x|<2\pi).$$

又记

$$I_1(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1},\qquad I_2(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2kx}{2k},$$

则有

$$I_2(x)=(\operatorname{sgn}x)\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k(2|x|)}{k}=\frac{1}{2}(\operatorname{sgn}x)\frac{\pi-2|x|}{2}\quad(|x|<\pi).$$

由 $I(x)=I_1(x)+I_2(x)$，当 $|x|<\pi$ 时，有

$$(\operatorname{sgn}x)\frac{\pi-|x|}{2}=I_1(x)+(\operatorname{sgn}x)\frac{\pi-2|x|}{4}.$$

于是，最后得 $I_1(x)=(\operatorname{sgn}x)\left(\frac{\pi-|x|}{2}-\frac{\pi-2|x|}{4}\right)=\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}x\quad(|x|<\pi)$.

【3023】 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2-1}$.

解 首先仿照 3018 题的解法，只要在公式 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\ln\frac{1}{1-z}$ 中令 $z=-e^{ix}$，并注意幅角主值的取法，就有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}=-\frac{x}{2}\quad(|x|<\pi)\tag{1}$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n}=-\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right).\tag{2}$$

由于 $\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$，故有

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2-1}&=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n-1}-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n+1}\\&=-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\cos(m+1)x}{m}+\frac{1}{2}\sum_{m=3}^{\infty}(-1)^m\frac{\cos(m-1)x}{m}\\&=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m}[\cos(m-1)x-\cos(m+1)x]-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cos x\right)\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\cos x}{2}\right)+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m}\sin mx\sin x=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\cos x}{2}\right)-\frac{x}{2}\sin x\\&\qquad(|x|<\pi).\end{aligned}$$

【3024】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

解 记 $F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$，显然级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 上一致收敛，故 $F(x)$ 是 $-\infty<x<+\infty$ 上的连续函数，而且是以 2π 为周期的周期函数. 因此，只要求 $F(x)$ 在 $|x|\leqslant\pi$ 上的值. 易知

$$2\sin x\sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)x=1-\cos 2nx.$$

故当 $\tau\leqslant x\leqslant\pi-\tau$ $\left(0<\tau<\frac{\pi}{2}\text{是任意的}\right)$ 时，有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)x\right|\leqslant\frac{1}{\sin\tau}.$$

于是，根据狄利克雷判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$ 在 $\tau\leqslant x\leqslant\pi-\tau$ 上一致收敛. 从而，由逐项求导数法则知，当 $\tau\leqslant x\leqslant\pi-\tau$ 时，有

$$F'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=-\frac{\pi}{4}{}^{*)}.\tag{1}$$

由 τ 的任意性知(1)式当 $0<x<\pi$ 时成立. 于是，

$$F(x)=-\frac{\pi}{4}x+C \quad (0<x<\pi). \tag{2}$$

其中 C 是某常数.由 $F(x)$ 在 $x=0$ 的连续性以及

$$F(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}{}^{**)},$$

在(2)式中令 $x\to+0$ 取极限,即得 $C=\frac{\pi^2}{8}$,于是,

$$F(x)=-\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi^2}{8} \qquad (0\leqslant x<\pi).$$

由此,再注意到 $F(x)$ 是偶函数及连续函数,得 $F(x)=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}|x| \quad (|x|\leqslant\pi)$.

*) 利用 3022 题的结果.

**) 利用 2961 题的结果.

【3025】 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n(n+1)}$.

解 由于 $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$,故得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n(n+1)}&=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n+1}\\&=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}-\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\sin(m-1)x}{m}\\&=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}-\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\sin mx}{m}\cos x+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\cos mx}{m}\sin x\\&=-(1+\cos x)\left(-\frac{x}{2}\right)-\sin x\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)^{*)}\\&=\frac{x}{2}(1+\cos x)-\sin x\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right) \quad (|x|<\pi).\end{aligned}$$

*) 利用解 3023 题的(1)、(2)两式的结果.

【3026】 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}$.

解 令 $z=e^{ix}$,考虑级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=e^z$.注意到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}+i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}, \quad e^z=e^{\cos x+i\sin x}=e^{\cos x}[\cos(\sin x)+i\sin(\sin x)],$$

故按实部和虚部分别各自相等的关系,即得 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}=e^{\cos x}\cos(\sin x) \quad (|x|<+\infty)$.

【3027】 画出曲线 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx\cdot\sin ny}{n^2}=0$.

解 记

$$f(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx\sin ny}{n^2},$$

注意到 $f(x,y)$ 对 x、y 分别均为以 2π 为周期的周期函数,故可考虑下列定义域:

$$R=\{0\leqslant x<2\pi,\ 0\leqslant y<2\pi\},$$

为研究 $f(x,y)=0$ 的图像,要用到下列函数:

$$g(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nt}{n^2} \quad (|t|<+\infty).$$

为求 $g(t)$,考虑 $g'(t)$,仿 3024 题的办法可知可逐项求导数,再注意到 3022 题求解过程中的关系,有

$$g'(t)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt}{n}=-(\mathrm{sgn}\,t)\frac{\pi-|t|}{2} \quad (0<|t|<2\pi).$$

注意常数 $g(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，于是，得

$$g(t)=g(0)+\int_0^t g'(t)\mathrm{d}t=g(0)-\frac{\pi}{2}|t|+\frac{1}{4}t^2.$$

由于 $\sin nx\sin ny=\frac{1}{2}[\cos n(x-y)-\cos n(x+y)]$，故得

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(x-y)-\cos n(x+y)}{n^2}=\frac{1}{2}[g(x-y)-g(x+y)]\\&=\frac{1}{2}\left\{\left[g(0)-\frac{\pi}{2}|x-y|+\frac{1}{4}(x-y)^2\right]-\left[g(0)-\frac{\pi}{2}|x+y|+\frac{1}{4}(x+y)^2\right]\right\}\\&=\frac{\pi}{4}(|x+y|-|x-y|)+\frac{1}{8}[(x-y)^2-(x+y)^2]\\&=\frac{\pi}{4}\cdot 2\min\{x,y\}+\frac{1}{8}(-4xy)\\&=\frac{1}{2}[\pi-\max\{x,y\}]\min\{x,y\}.\end{aligned}$$

若 $x\leqslant y$，则令 $f(x,y)=0$，$(x,y)\in R$，有 $x(\pi-y)=0$，得 $x=0$ 或 $y=\pi$. 若 $x\geqslant y$，则令 $f(x,y)=0$，$(x,y)\in R$，有 $y(\pi-x)=0$，得 $y=0$ 或 $x=\pi$. 因此，在 R 内，$x=0$，$x=\pi$；$y=0$，$y=\pi$ 诸直线是满足 $f(x,y)=0$ 的图像.

又根据 $f(x,y)$ 的表达式知，图像必然是按 x 及按 y 以 2π 为周期的周期曲线，故得

$$x=l\pi,\ l=0,\pm1,\pm2,\cdots,\quad y=m\pi,\ m=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

诸直线均为 $f(x,y)=0$ 的图像，且除此而外，均有 $f(x,y)\neq0$，即不是 $f(x,y)=0$ 的图像. 因此，$f(x,y)=0$ 的图像即为上述所指的两族直线组. 由于这是两族分别与坐标轴平行且相距为 π 的直线族，它们的图像已为大家所熟知，故省略.

求下列级数的和：

【3028】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}(2x)^{2n}$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n!)^2}{(2n+2)!}(2x)^{2n+2}}{\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}(2x)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2x^2}{(2n+2)(2n+1)}=x^2,$$

故原幂级数当 $|x|<1$ 时收敛，当 $|x|>1$ 时发散，即其收敛区间为 $(-1,1)$. 当 $|x|=1$，原级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2 4^n}{(2n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

由于

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\frac{3n+1}{2n}\to\frac{3}{2}>1\quad(n\to\infty),$$

故由拉比判别法知，当 $|x|=1$ 时原幂级数也收敛. 因此，原幂级数当 $-1\leqslant x\leqslant1$ 时一致收敛. 从而，其和函数 $f(x)$ 是 $-1\leqslant x\leqslant1$ 上的连续函数，且在 $-1<x<1$ 内可逐项微分，得

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}4n(2x)^{2n-1}\quad(-1<x<1),$$

$$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}8n(2n-1)(2x)^{2n-2}\quad(-1<x<1),$$

于是，

$$\begin{aligned}&-xf'(x)+(1-x^2)f''(x)\\&=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}2n(2x)^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}8n(2n-1)(2x)^{2n-2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}2n(2n-1)(2x)^{2n}\end{aligned}$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}4n^2(2x)^{2n}+4+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}8n(2n-1)(2x)^{2n-2}$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}4n^2(2x)^{2n}+4+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+2)!}8(n+1)(2n+1)(2x)^{2n}=4\quad(-1<x<1).$$

因此,

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}f'(x)+\sqrt{1-x^2}f''(x)=\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\quad(-1<x<1),$$

两端积分,得

$$\sqrt{1-x^2}f'(x)=4\arcsin x+C\quad(-1<x<1).$$

由 $f'(0)=0$,得 $C=0$,从而,

$$f'(x)=\frac{4\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\quad(-1<x<1).$$

两端再积分,得

$$f(x)=2(\arcsin x)^2+C_1\quad(-1<x<1).$$

再由 $f(0)=0$,得 $C_1=0$. 于是,有

$$f(x)=2(\arcsin x)^2\quad(-1<x<1).$$

再注意到上式两端都是 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上的连续函数,通过取极限,即知上式当 $x=1$ 和 $x=-1$ 时也成立,故最后得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}(2x)^{2n}=2(\arcsin x)^2\quad(-1\leqslant x\leqslant 1).$$

【3029】 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}}{\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}=\frac{1}{4},$$

故原幂级数的收敛半径等于 4,即它当 $|x|<4$ 时收敛,当 $|x|>4$ 时发散. 当 $x=\pm 4$ 时,原幂级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(\pm 4)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n. \tag{1}$$

由于 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{2n+2}{2n+1}>1$,故 $|a_{n+1}|>|a_n|$ $(n=0,1,\cdots)$,因此,a_n 不趋于零,从而,级数(1)发散. 于是,原幂级数仅当 $|x|<4$ 时收敛,下面分两种情形讨论:

当 $0\leqslant x<4$ 时,令 $x=(2t)^2$,$0\leqslant t<1$,则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(2t)^{2n}=F(t)\quad(0\leqslant t<1).$$

由直接计算,易知

$$(1-t^2)F(t)-1=\frac{t}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}4n(2t)^{2n-1}\quad(0\leqslant t<1).$$

利用 3028 题的结果,得

$$(1-t^2)F(t)-1=\frac{t}{4}[2(\arcsin t)^2]'=\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\arcsin t\quad(0\leqslant t<1),$$

从而,

$$F(t)=\frac{1}{1-t^2}\left(1+\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\arcsin t\right)\quad(0\leqslant t<1).$$

将 $t=\frac{\sqrt{x}}{2}$ 代入,即得 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n=\frac{4}{4-x}+\frac{4\sqrt{x}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}}\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}\quad(0\leqslant x<4).$

现设 $-4<x<0$. 令 $x=-(2t)^2$, $0<t<1$. 于是,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(-1)^n(2t)^{2n}=G(t)\quad(0<t<1).$$

由直接计算可知

$$1-(1+t^2)G(t)=t\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}n(2t)^{2n-1}=t\cdot g(t)\quad(0<t<1),$$

其中

$$g(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}n(2t)^{2n-1}.\tag{2}$$

易知(2)式右端幂级数的收敛半径等于 1. 于是,当 $|t|<1$ 时可逐项微分,得

$$g'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}2n(2n-1)(2t)^{2n-2}.$$

由直接计算可知

$$\begin{aligned}
&(1+t^2)g'(t)+t\cdot g(t)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}\cdot 2n(2n-1)(2t)^{2n-2}\\
&\quad+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}\cdot\frac{1}{2}n(2n-1)(2t)^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}\cdot\frac{n}{2}(2t)^{2n}\\
&=1+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}2n(2n-1)(2t)^{2n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}n^2(2t)^{2n}\\
&=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(n!)^2}{(2n+2)!}2(n+1)(2n+1)(2t)^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}n^2(2t)^{2n}\\
&=1\quad(-1<t<1),
\end{aligned}$$

即

$$\sqrt{1+t^2}\,g'(t)+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}g(t)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\quad(-1<t<1).$$

两端积分,得

$$\sqrt{1+t^2}\,g(t)=\ln(t+\sqrt{1+t^2})+C\quad(-1<t<1).$$

由 $g(0)=0$,得 $C=0$,故

$$g(t)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\ln(t+\sqrt{1+t^2})\quad(-1<t<1).$$

于是,根据关系式

$$G(t)=\frac{1}{1+t^2}[1-t\cdot g(t)]\quad(0<t<1),$$

再将 $t=\frac{\sqrt{-x}}{2}=\frac{\sqrt{|x|}}{2}$ 代入,得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n=\frac{4}{4-x}-\frac{4\sqrt{|x|}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}}\ln\left(\frac{\sqrt{|x|}+\sqrt{4-x}}{2}\right)\quad(-4<x<0).$$

【3030】 $\frac{1!}{x+1}+\frac{2!}{(x+1)(x+2)}+\frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)}+\cdots.$

解 显然,要使本题有意义,首先要假定 x 不是负整数,记

$$s_n=\frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

为研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}s_n$ 的收敛性及其和,注意当 $x\neq1$ 时,有关系式

$$\frac{1}{x-1}=\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x+1}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)$$

$$=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}\cdot\frac{2}{x-1}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}\cdot\frac{2}{x+2}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$$

$$=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}\cdot\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x+1}\cdot\frac{2}{x+2}\cdot\frac{3}{x-1}$$

$$=\frac{1!}{x+1}+\frac{2!}{(x+1)(x+2)}+\frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)}+\frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)}\cdot\frac{4}{x-1}$$

$$=\cdots$$

$$=\frac{1!}{x+1}+\frac{2!}{(x+1)(x+2)}+\frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)}+\cdots+\frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

$$+\frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\cdot\frac{n+1}{x-1}$$

$$=s_1+s_2+\cdots+s_n+R_n, \tag{1}$$

其中

$$R_n=s_n\cdot\frac{n+1}{x-1}=\frac{1}{x-1}\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{x+k}=\frac{1}{x-1}\prod_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{x}{k}}=\frac{1}{x-1}\prod_{k=1}^{n}(1+\alpha_k),$$

这里(当 k 充分大时)

$$\alpha_k=\frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{x}{k}}-1=\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1}-1=\frac{1-x}{k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right). \tag{2}$$

由(1)式知,为研究 $\sum_{n=1}^{\infty}s_n$,就是要研究 R_n 有无极限.若 R_n 有极限为 τ,则由(1)得

$$\sum_{k=1}^{\infty}s_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}s_k=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x-1}-R_n\right)=\frac{1}{x-1}-\tau.$$

令 $u_n=\prod_{k=1}^{n}(1+\alpha_n)$.分两种情形讨论:

若 $x>1$,这时 $0<1+\alpha_k=\frac{k+1}{x+k}<1\ (k=1,2,\cdots)$.于是,

$$\ln u_n=\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\alpha_k),\quad \ln(1+\alpha_k)<0,\quad \alpha_k<0,\quad (k=1,2,3,\cdots),\ \alpha_k\to 0. \tag{3}$$

由(2)式与(3)式并注意到 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ 收敛,$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ 发散知:$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ 发散且 $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k=-\infty$.于是,根据 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\alpha_k)}{\alpha_k}=1$ 即知,级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+\alpha_k)$ 发散且 $\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+\alpha_k)=-\infty$.由此知 $\lim_{n\to\infty}\ln u_n=-\infty$,从而,$\lim_{n\to\infty}u_n=0$,于是,$\lim_{n\to\infty}R_n=0$,故 $\sum_{k=1}^{\infty}s_k=\frac{1}{x-1}$.

若 $x<1$.注意,已设 x 不是负整数.另外,当 $x=0$ 时原级数为 $\sum_{k=1}^{\infty}1$,显然发散,故可设 $-m<x<-m+1$,其中 m 是某非负整数.于是,

$$1+\alpha_k=\frac{k+1}{x+k}<0\quad(k=1,2,\cdots,m-1),$$

$$1+\alpha_k=\frac{k+1}{x+k}>0\quad(k=m,m+1,\cdots).$$

令 $v_n=\prod_{k=m}^{n}(1+\alpha_k)\ (n=m,m+1,\cdots)$,则

$$\ln v_n=\sum_{k=m}^{n}\ln(1+\alpha_k)\quad(n=m,m+1,\cdots).$$

根据(2)式知，当 k 充分大时 $\alpha_k>0$ 并且级数 $\sum_{k=m}^{n}\alpha_k$ 发散. 仿照前面的论述可知，级数 $\sum_{k=m}^{\infty}\ln(1+\alpha_k)$ 发散，且 $\sum_{k=m}^{\infty}\ln(1+\alpha_k)=+\infty$. 从而，当 $n\to\infty$ 时，$\ln v_n\to+\infty$，$v_n\to+\infty$. 由此可知

$$\lim_{n\to\infty}R_n=\pm\infty,$$

其中的正负号随 m 是 2,4,6,…之一或 0,1,3,5,…之一而定. 由此可知，此时 $\sum_{k=1}^{\infty}s_n$ 发散.

另外，若 $x=1$，原级数为 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}$，显然发散.

综上所述，可知原级数仅当 $x>1$ 时收敛，且此时有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}=\frac{1}{x-1}$.

【3031】 $\frac{a_1}{a_2+x}+\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x}+\cdots$ 在 $x>0$，$a_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 发散的条件下.

解 记

$$s_n=\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x}\cdots\frac{a_n}{a_{n+1}+x}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

注意条件 $x>0$，$a_n>0$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{a_1}{x}&=\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2+x}{x}=\frac{a_1}{a_2+x}+\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{x}\\&=\frac{a_1}{a_2+x}+\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x}+\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x}\cdot\frac{a_3}{x}\\&=\cdots\\&=\frac{a_1}{a_2+x}+\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x}+\cdots+\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x}\cdots\frac{a_{n-1}}{a_n+x}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}+x}+\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x}\cdots\\&\quad\cdot\frac{a_{n-1}}{a_n+x}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}+x}\cdot\frac{a_{n+1}}{x}\\&=s_1+s_2+\cdots+s_n+R_n,\end{aligned}\tag{1}$$

其中

$$\begin{aligned}R_n&=\frac{a_{n+1}}{x}s_n=\frac{a_1}{x}\cdot\frac{a_2}{a_2+x}\cdot\frac{a_3}{a_3+x}\cdots\frac{a_n}{a_n+x}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}+x}=\frac{a_1}{x}\prod_{k=2}^{n+1}\frac{a_k}{a_k+x}=\frac{a_1}{x}\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{x}{a_k+x}\right)\\&=\frac{a_1}{x}\prod_{k=2}^{n+1}(1+\alpha_k),\end{aligned}\tag{2}$$

这里

$$\alpha_k=-\frac{x}{a_k+x}\quad(k=2,3,\cdots,n+1).\tag{3}$$

由(1)知，为研究原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}s_n$，就是要研究 R_n 有无极限. 若 R_n 有极限 τ，则由(1)得

$$\sum_{k=1}^{\infty}s_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}s_k=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{x}-R_n\right)=\frac{a_1}{x}-\tau.\tag{4}$$

下面我们证明 R_n 有极限 $\tau=0$. 显然

$$-1<\alpha_k<0,\quad 0<1+\alpha_k<1\quad(k=2,3,\cdots).$$

令 $u_n=\prod_{k=2}^{n+1}(1+\alpha_k)$，则 $\ln u_n=\sum_{k=2}^{n+1}\ln(1+\alpha_k)$. 易知正项级数 $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{a_k+x}$ 是发散的. 事实上，由 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k}$ 的发散性，可将 a_k 分为以下情况来讨论：1)若 $a_k\geqslant x(k=2,3,\cdots)$，则

$$a_k+x\leqslant 2a_k\quad 即\quad \frac{1}{a_k+x}\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_k}.$$

由 $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{a_k}$ 发散(无界)便知 $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{a_k+x}$ 发散. 2)若除有限个 a_k 之外均有 $a_k\geqslant x$(k 取除了某些有限个正整数以

外的所有正整数)，则仍有上述结论. 3)若存在一个数列 a_{k_i} 使得 $a_{k_i}<x$ $(i=1,2,3,\cdots)$，则我们有

$$a_{k_i}+x<2x \quad 即 \quad \frac{1}{a_{k_i}+x}>\frac{1}{2x} \quad (i=1,2,\cdots).$$

显然，有

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{a_{k_i}+x}>\frac{N}{2x}\to\infty \quad (当\ N\to\infty),$$

于是，级数 $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{a_k+x}$ 发散. 从而，

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{a_k+x}=+\infty, \qquad \sum_{k=2}^{\infty}\alpha_k=-\infty.$$

注意到 $-1<\alpha_k<0$，$\ln(1+\alpha_k)<\alpha_k<0$ $(k=2,3,\cdots)$，可知

$$\sum_{k=2}^{\infty}\ln(1+\alpha_k)=-\infty.$$

由此可知，当 $n\to\infty$ 时，$\ln u_n\to-\infty$，$u_n\to0$，$R_n\to0$，即 $\tau=0$. 于是，原级数收敛，且

$$\frac{a_1}{a_2+x}+\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x}+\cdots=\frac{a_1}{x}.$$

【3032】 $\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\frac{x^4}{1-x^8}+\cdots$ *)，若(1) $|x|<1$；(2) $|x|>1$.

解 记

$$s_n=\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} \quad (n=0,1,2,\cdots;\ |x|\neq1).$$

注意，当 $|x|\neq1$ 时，有公式

$$\begin{aligned}\frac{x}{1-x}&=\frac{x}{1-x^2}(1+x)=\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^2}=\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}(1+x^2)\\&=\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\frac{x^4}{1-x^4}=\cdots=\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\cdots+\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}+\frac{x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^{n+1}}}\\&=s_1+s_2+\cdots+s_n+R_n,\end{aligned}$$

其中 $R_n=\frac{x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^{n+1}}}$. 上述恒等式对任何 n 均成立. 为求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}s_n$，我们分两种情况予以处理：

(1) 当 $|x|<1$ 时，$R_n=\frac{|x|^{2^{n+1}}}{1-|x|^{2^{n+1}}}\to0$ $(n\to\infty)$. 于是，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}s_n=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}s_n=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{x}{1-x}-R_N\right)=\frac{x}{1-x}.$$

(2) 当 $|x|>1$ 时，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{|x|}\right)^{2^{n+1}}=0$ 得

$$\lim_{n\to\infty}R_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x|^{2^{n+1}}}{1-|x|^{2^{n+1}}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\left(\frac{1}{|x|}\right)^{2^{n+1}}-1}\right\}=-1.$$

从而得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}s_n=\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{N}s_k=\lim\limits_{N\to\infty}\left(\frac{x}{1-x}-R_N\right)=\frac{x}{1-x}+1=\frac{1}{1-x}$.

*) 本题第三项前原题为减号，应为加号.

【3033】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$，若(1) $|x|<1$；(2) $|x|>1$.

解 记 $s_n=\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$ $(n=1,2,\cdots;\ |x|\neq1)$.

注意到

$$\frac{1}{1-x^n}-\frac{1}{1-x^{n+1}}=\frac{x^n(1-x)}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}=\frac{1-x}{x}\,\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}=\frac{1-x}{x}s_n \quad (n=1,2,\cdots),$$

即得

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1-x}{x}s_k=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{1-x^k}-\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{1-x^{k+1}}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^{N+1}},$$

或有

$$\sum_{k=1}^{N}s_k=\frac{x}{(1-x)^2}-\frac{x}{1-x}\frac{1}{1-x^{N+1}}.$$

于是,(1) 当$|x|<1$时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}s_n=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}s_k=\frac{x}{(1-x)^2}-\frac{x}{1-x}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{1-x^{N+1}}=\frac{x}{(1-x)^2}-\frac{x}{1-x}=\frac{x^2}{(1-x)^2}.$$

(2) 当$|x|>1$时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}s_n=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}s_k=\frac{x}{(1-x)^2}+\frac{x}{1-x}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{x^{N+1}-1}=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

§8. 利用级数求定积分

利用被积函数的级数展开式计算下列积分:

【3034】 $\int_0^1 \ln\frac{1}{1-x}dx.$

解题思路 利用 2549 题的结果.但必须注意,由于幂级数(收敛半径为 1)

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots$$

当$x=1$时发散,故它在$0\leqslant x\leqslant 1$上逐项积分的合理性要给出证明,详见本题的证明.

解 $\int_0^1 \ln\frac{1}{1-x}dx=-\int_0^1\ln(1-x)dx=-\int_0^1\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots\right)dx$

$$=\int_0^1 xdx+\int_0^1\frac{x^2}{2}dx+\int_0^1\frac{x^3}{3}dx+\cdots^{*)}$$

$$=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots=1.^{**)}$$

*) 由于幂级数(收敛半径为 1)$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots$当$x=1$时发散,故它在$0\leqslant x\leqslant 1$上逐项积分的合理性要单独证明,今证如下:

对任何$0<\tau<1$,有

$$\int_0^\tau\ln(1-x)dx=\int_0^\tau\left(-x-\frac{x^2}{2}-\cdots-\frac{x^n}{n}\right)dx+R_n, \tag{1}$$

其中

$$R_n=\int_0^\tau\left(-\frac{x^{n+1}}{n+1}-\frac{x^{n+2}}{n+2}-\cdots\right)dx.$$

由于$0<\tau<1$,故可在$0\leqslant x\leqslant\tau$上逐项积分,得

$$0>R_n=-\left[\frac{\tau^{n+2}}{(n+1)(n+2)}+\frac{\tau^{n+3}}{(n+2)(n+3)}+\cdots\right]>-\left[\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots\right]$$

$$=-\left[\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\cdots\right]=-\frac{1}{n+1}.$$

于是,由(1)式知

$$\left|\int_0^\tau\ln(1-x)dx-\left(-\frac{\tau^2}{1\cdot 2}-\frac{\tau^3}{2\cdot 3}-\cdots\frac{\tau_{n+1}}{n(n+1)}\right)\right|<\frac{1}{n+1}. \tag{2}$$

在(2)式中让n固定而令$\tau\to 1-0$取极限(注意,瑕积分$\int_0^1\ln(1-x)dx$显然收敛),得

$$\left|\int_0^1 \ln(1-x)\,dx-\left(-\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}-\cdots\frac{1}{n(n+1)}\right)\right|<\frac{1}{n+1}\quad (n=1,2,3,\cdots).$$

由此式即知

$$\int_0^1 \ln(1-x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}-\cdots\frac{1}{n(n+1)}\right)=-\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}-\cdots,$$

也即

$$\int_0^1\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots\right)dx=\int_0^1(-x)\,dx+\int_0^1\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx+\int_0^1\left(-\frac{x^3}{3}\right)dx+\cdots,$$

换句话说，逐项积分公式成立.

本节以下诸题中，凡在端点发散的级数的逐项积分的合理性问题，都可仿照上面类似地去证明，不再一一写出.

**） 利用 2549 题的结果.

【3035】 $\int_0^1 \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}dx.$

解 $$\int_0^1 \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}dx=\int_0^1 \frac{x+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right\}^{*)}}{x}dx$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

*） 利用 2871 题的结果.

【3036】 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx.$

解 $$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx=\int_0^1 \frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots}{x}dx=\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\cdots\right)dx=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\cdots=\frac{\pi^2}{12}{}^{*)}.$$

*） 利用 2961 题的结果.

【3037】 $\int_0^1 x^{p-1}\ln(1-x^q)\,dx\quad (p>0,\ q>0).$

解 $$\int_0^1 x^{p-1}\ln(1-x^q)\,dx=\int_0^1 x^{p-1}\left(-x^q-\frac{x^{2q}}{2}-\frac{x^{3q}}{3}-\cdots\right)dx$$

$$=-\int_0^1\left(x^{p+q-1}+\frac{1}{2}x^{p+2q-1}+\frac{1}{3}x^{p+3q-1}+\cdots\right)dx=-\left(\frac{1}{p+q}+\frac{1}{p+2q}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{p+3q}\cdot\frac{1}{3}+\cdots\right)$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(p+nq)}.$$

【3038】 $\int_0^1 \ln x\cdot\ln(1-x)\,dx.$

解 $$\int_0^1 \ln x\cdot\ln(1-x)\,dx=-\int_0^1\left(\ln x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)dx$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\ln x\Big|_0^1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)^2}\Big|_0^1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$=1-\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)^{*)}=2-\frac{\pi^2}{6}.$$

*） 利用 2549 题及 2961 题的结果.

【3039】 $\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{e^{2\pi x}-1}.$

解 $$\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{e^{2\pi x}-1}=\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-2\pi x}}{1-e^{-2\pi x}}dx=\int_0^{+\infty}xe^{-2\pi x}(1+e^{-2\pi x}+e^{-4\pi x}+\cdots)dx$$

$$=\left[-\frac{x}{2\pi}e^{-2\pi x}-\frac{1}{(2\pi)^2}e^{-2\pi x}\right]_0^{+\infty}+\left[-\frac{x}{4\pi}e^{-4\pi x}-\frac{1}{(4\pi)^2}e^{-4\pi x}\right]_0^{+\infty}+\left[-\frac{x}{6\pi}e^{-6\pi x}-\frac{1}{(6\pi)^2}e^{-6\pi x}\right]_0^{+\infty}+\cdots$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)=\frac{1}{4\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{6}^{*)}=\frac{1}{24}.$$

*） 利用 2961 题的结果.

【3040】 $\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1}$.

解 $\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1}=\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{-x}}=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}-\cdots)\mathrm{d}x$

$$=\left[-x\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{+\infty}-\left[-\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-2x}-\frac{1}{2^2}\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^{+\infty}+\left[-\frac{1}{3}x\mathrm{e}^{-3x}-\frac{1}{3^2}\mathrm{e}^{-3x}\right]_0^{+\infty}-\cdots$$

$$=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\cdots=\frac{\pi^2}{12}^{*)}.$$

*） 利用 2961 题的结果.

【3041】 按模数 $k(0\leqslant k<1)$ 的正整数次幂展开第一类完全椭圆积分 $F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$.

解 $F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi+\frac{3}{8}k^4\sin^4\varphi+\frac{5}{16}k^6\sin^6\varphi+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n}\varphi+\cdots\right)\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2k^{2n}\right\}^{*)}.$$

*） 利用 2281 题的结果.

【3042】 按模数 $k(0\leqslant k<1)$ 的正整数次幂展开第二类完全椭圆积分 $E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$.

解 $E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n}\varphi\right\}\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi}{2}\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\frac{k^{2n}}{2n-1}\right\}^{*)}.$$

*） 利用 2281 题的结果.

【3043】 利用按椭圆离心率的正整数次幂展开的级数表示椭圆 $x=a\cos t$，$y=b\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的弧长.

解 设 $a>b$，则 $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$，$\left(\frac{b}{a}\right)^2=1-\varepsilon^2$. 弧长为

$$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}\,\mathrm{d}t=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2t}\,\mathrm{d}t$$

$$=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\varepsilon^{2n}\cos^{2n}t\right\}\mathrm{d}t=4a\cdot\frac{\pi}{2}\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\frac{\varepsilon^{2n}}{2n-1}\right\}$$

$$=2\pi a\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2-\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2\cdot\frac{\varepsilon^4}{3}-\cdots\right\}.$$

证明下列等式：

【3044】 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$.

解 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^x}=\int_0^1\mathrm{e}^{-x\ln x}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(1-x\ln x+\frac{1}{2!}x^2\ln^2x-\frac{1}{3!}x^3\ln^3x+\cdots\right)\mathrm{d}x$

$$=\left[x-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{2!\cdot3}\ln^2x-\frac{x^3}{3^2}\ln x+\frac{x^3}{3^3}-\frac{x^4}{3!\cdot4}\ln^3x+\frac{x^4}{2\cdot4^2}\ln^2x-\frac{x^4}{4^3}\ln x+\frac{x^4}{4^4}+\cdots\right]_0^1$$

$$=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n},$$

本题得证.

【3045】 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\sin ax\,dx=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!}a^{2n+1}$.

解 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\sin ax\,dx=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}dx$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}x^{2n+1}dx=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$

$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!}e^{-t}\left[t^n+nt^{n-1}+n(n-1)t^{n-2}+\cdots+n!t+n!\right]\Big|_0^{+\infty}$

$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!}a^{2n+1}$.

本题得证.

【3046】 $\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)\cos nx\,dx=\frac{\pi}{n!}\quad(n=0,1,2,\cdots)$.

解 若复数 $w=u+iv$,记 $\text{Re}\{w\}=u$ 为其实部,则有 $\text{Re}\{e^{e^{ix}}\}=e^{\cos x}\cos(\sin x)$. 因此,原定积分为

$$I_n=\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)\cos nx\,dx$$

$$=\text{Re}\left\{\int_0^{2\pi} e^{e^{ix}}\cos nx\,dx\right\}=\text{Re}\left\{\int_0^{2\pi} e^{e^{ix}}\cdot\frac{1}{2}(e^{inx}+e^{-inx})dx\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\text{Re}\left\{\int_0^{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(e^{ix})^m}{m!}(e^{inx}+e^{-inx})dx\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{m_1=0}^{\infty}\frac{1}{m_1!}\text{Re}\left\{\int_0^{2\pi} e^{i(m_1+n)x}dx\right\}+\sum_{m_2=0}^{\infty}\frac{1}{m_2!}\text{Re}\left\{\int_0^{2\pi} e^{i(m_2-n)x}dx\right\}\right].$$

注意,对任意整数 k,有积分关系:

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx}dx=\begin{cases}2\pi, & k=0,\\ 0, & k\neq 0.\end{cases}$$

从而,当 $n\geqslant 0$, $m\geqslant 0$ 时,有:

(1) 当 $n=0$ 时,

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m+n)x}dx=\begin{cases}2\pi, & m=0,\\ 0, & m\neq 0.\end{cases}\qquad \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x}dx=\begin{cases}2\pi, & m=n,\\ 0, & m\neq n.\end{cases}$$

此时相应地得 $I_0=\frac{1}{2}(2\pi+2\pi)=2\pi$.

(2) 当 $n=1,2,3,\cdots$时,

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m+n)x}dx=0;\qquad \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x}dx=\begin{cases}2\pi, & m=n,\\ 0, & m\neq n.\end{cases}$$

此时相应地得 $I_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n!}2\pi\right)=\frac{\pi}{n!}$.

求:

【3047】 $\int_0^{2\pi} e^{a\cos x}\cos(a\sin x-nx)dx\quad$($n$ 是正整数).

解 被积函数正是 $e^{ae^{ix}-inx}$ 的实部,故积分为

$$I=\int_0^{2\pi} e^{a\cos x}\cos(a\sin x-nx)dx=\int_0^{2\pi}\text{Re}\{e^{ae^{ix}-inx}\}dx$$

$$=\text{Re}\left\{\int_0^{2\pi} e^{ae^{ix}}e^{-inx}\,dx\right\}=\text{Re}\left\{\int_0^{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(ae^{ix})^m}{m!}e^{-inx}dx\right\}=\text{Re}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^m}{m!}\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x}dx\right\}$$

$$=\text{Re}\left\{\frac{a^n}{n!}\cdot 2\pi+\sum_{\substack{m=0\\ m\neq n}}^{\infty}\frac{a^m}{m!}\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x}dx\right\}=\frac{2\pi a^n}{n!}.$$

【3048】+ $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}dx$.

提示 利用 2864 题的结果.

解 利用 2864 题的结果,即得

$$\frac{x\sin x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n x\sin nx \quad (|\alpha|<1).$$

由于 $\int_0^\pi x\sin nx dx=(-1)^{n-1}\frac{\pi}{n}$,所以,当 $|\alpha|<1$ 时,就有

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x dx}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\alpha^n\frac{\pi}{n}=\pi\ln(1+\alpha).$$

当 $|\alpha|>1$ 时,$\left|\frac{1}{\alpha}\right|<1$,

$$\frac{x\sin x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}=\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{x\sin x}{1-2\left(\frac{1}{\alpha}\right)\cos x+\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2}.$$

利用以上结果,即得:当 $|\alpha|>1$ 时,$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}dx=\frac{\pi}{\alpha^2}\ln\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$.

【3049】 $\int_0^\pi \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx$.

提示 利用 2872 题的结果.

解 利用 2872 题的结果,即得:当 $|\alpha|\leqslant 1$ 时,

$$\int_0^\pi \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx=-2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\pi \frac{\alpha^n\cos nx}{n}dx=0.$$

当 $|\alpha|>1$ 时,即当 $\left|\frac{1}{\alpha}\right|<1$ 时,

$$\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)=\ln\left[\alpha^2\left(1-2\frac{1}{\alpha}\cos x+\frac{1}{\alpha^2}\right)\right]=\ln\alpha^2+\ln\left(1-\frac{2}{\alpha}\cos\alpha+\frac{1}{\alpha^2}\right).$$

利用以上结果,即得:当 $|\alpha|>1$ 时 $\int_0^\pi \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx=\pi\ln\alpha^2=2\pi\ln|\alpha|$.

【3050】 证明公式:

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{a+x}dx=\frac{1}{a}-\frac{1!}{a^2}+\frac{2!}{a^3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{a^n}+(-1)^n\frac{\theta_n n!}{a^{n+1}}, \tag{1}$$

其中 $a>0$ 且 $0<\theta_n<1$.

若于公式(1)中取两项来表示积分 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{100+x}dx$,其精确程度如何?

解 当 $x\geqslant 0$ 时,考虑函数 $f(x)=\frac{1}{x+a}$ 在 $x=0$ 点的 n 阶泰勒展式,有

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{x+a}=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^n(\theta x)}{n!}x^n\\&=\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{a^n}+(-1)^n\frac{1}{(a+\theta x)^{n+1}}x^n\\&=\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{a^n}+(-1)^n\frac{x^n}{a^{n+1}}\cdot\frac{1}{\left(1+\theta\cdot\frac{x}{a}\right)^{n+1}}\\&=\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{a^n}+(-1)^n\bar{\theta}_n(x)\frac{x^n}{a^{n+1}},\end{aligned}$$

其中 $0<\theta<1$,而对于函数 $\bar{\theta}_n(x)=\frac{1}{\left(1+\theta\frac{x}{a}\right)^{n+1}}$,也有 $0<\bar{\theta}_n(x)<1 \quad (0<x<+\infty)$. 由

$$\int_0^{+\infty}e^{-x}x^n dx=n!\ (n=0,1,2,\cdots) \qquad 以及 \quad 0<\int_0^{+\infty}e^{-x}\bar{\theta}_n(x)x^n dx<\int_0^{+\infty}e^{-x}x^n dx=n!,$$

即知 $\int_0^{+\infty} e^{-x}\bar{\theta}_n(x)x^n dx=\theta_n n!$，其中 $0<\theta_n<1$. 于是，

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{a+x}dx=\int_0^{+\infty}f(x)e^{-x}dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{a^k}\int_0^{+\infty}x^{k-1}e^{-x}dx+(-1)^n\frac{1}{a^{n+1}}\int_0^{+\infty}\theta_n(x)x^n e^{-x}dx$$

$$=\frac{1}{a}-\frac{1!}{a^2}+\frac{2!}{a^3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{a^n}+(-1)^n\frac{n!}{a^{n+1}}\theta_n.$$

公式证毕.

在上述公式中，令 $a=100=10^2$，则有

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{100+x}dx=10^{-2}-1!10^{-4}+2!10^{-6}-\cdots+(-1)^{n-1}(n-1)!10^{-2n}+(-1)^n\theta_n n!10^{-2n-2}$$

$$(0<\theta_n<1).$$

如果取前两项来表示积分，即在上式中取 $n=2$，则误差为 $(-1)^2\theta_2 2!10^{-6}$，其绝对值小于 $2\cdot10^{-6}$，于是，

$$\left|\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{100+x}dx-0.01+0.0001\right|\leqslant 0.000002=2\cdot10^{-6}.$$

§9. 无穷乘积

1° 无穷乘积的收敛性 若存在有限而且异于零的极限

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}p_i=\lim_{n\to\infty}P_n=P,$$

则称无穷乘积

$$p_1p_2\cdots p_n\cdots=\prod_{n=1}^{\infty}p_n \tag{1}$$

是收敛的.

若 $P=0$ 而乘数 p_n 中无一为零，则称乘积(1)发散于零；在相反的情形下，则称无穷乘积收敛于零.

乘积(1)的收敛性与级数

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\ln p_n \tag{2}$$

的收敛性是一样的.

收敛性的必要条件为：$\lim\limits_{n\to\infty}p_n=1$.

若 $p_n=1+\alpha_n(n=1,2,\cdots)$ 及 α_n 不变号，则乘积(1)收敛的充分必要条件为级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\sum_{n=1}^{\infty}(p_n-1) \tag{3}$$

收敛.

在一般的情形下，当 α_n 不保持固定的符号而级数(3)收敛时，乘积(1)与级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}(p_n-1)^2$$

同时收敛或同时发散，且在发散的情形下，乘积发散于零.

2° 绝对收敛性 若级数(2)绝对收敛或条件收敛，则称乘积(1)为绝对收敛或条件(非绝对)收敛. 级数(3)绝对收敛是乘积(1)绝对收敛的充分必要条件.

3° 函数的无穷乘积展开 当 $-\infty<x<+\infty$ 时有展开式

$$\sin x=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),\quad \cos x=\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right].$$

特别是，由第一式当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时得沃利斯公式

$$\frac{\pi}{2}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right).$$

证明下列等式：

【3051】 $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$.

证 记 $p_n=1-\frac{1}{n^2}$. 由于部分乘积

$$P_n=\prod_{i=2}^{n}p_i=(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\to\frac{1}{2}\quad(\text{当 } n\to\infty\text{时}),$$

故 $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$.

【3052】 $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}$.

证 记 $p_n=\frac{n^3-1}{n^3+1}$. 由于部分乘积

$$P_n=\prod_{i=2}^{n}p_i=\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\to\frac{2}{3}\quad(\text{当 } n\to\infty\text{时}),$$

故 $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}$.

【3053】 $\prod_{n=2}^{\infty}\left[1-\frac{2}{n(n+1)}\right]=\frac{1}{3}$.

证 记 $p_n=1-\frac{2}{n(n+1)}$. 由于部分乘积

$$P_n=\prod_{i=2}^{n}p_i=\frac{4\cdot 1}{2\cdot 3}\cdot\frac{5\cdot 2}{3\cdot 4}\cdots\frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{n+2}{n}\to\frac{1}{3}\quad(\text{当 } n\to\infty\text{时}),$$

故 $\prod_{n=2}^{\infty}\left[1-\frac{2}{n(n+1)}\right]=\frac{1}{3}$.

【3054】 $\prod_{n=0}^{\infty}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right]=2$.

证 由于部分乘积满足下述等式：

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)P_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}$$

从而，$P_n=\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{1-\frac{1}{2}}\to\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$ (当 $n\to\infty$时)，故 $\prod_{n=0}^{\infty}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right]=2$.

【3055】 $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}=\frac{2}{\pi}$.

证 由于部分乘积

$$P_n=\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\left(\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\cdot 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)=\cdots$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2^n\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}\cdot\frac{2}{\pi}\to\frac{2}{\pi}\quad(\text{当 } n\to\infty\text{时}),$$

故 $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}=\frac{2}{\pi}$.

【3056】 $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}$.

证 当 $x\neq 0$ 时，由于部分乘积

$$P_n=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\frac{\sin x}{x}\to\frac{\sin x}{x}\quad(\text{当 } n\to\infty \text{时}),$$

故 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}$.

【3057】 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{ch}\frac{x}{2^n}=\frac{\operatorname{sh}x}{x}$.

证 由于部分乘积

$$P_n=\operatorname{ch}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2^2}\cdots\operatorname{ch}\frac{x}{2^n}=\frac{\operatorname{sh}x}{2^n\operatorname{sh}\frac{x}{2^n}}=\frac{\operatorname{sh}x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2^n}}\quad(x\neq 0)\quad\text{及}\quad\lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{sh}y}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\operatorname{ch}y}=1,$$

故 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{ch}\frac{x}{2^n}=\frac{\operatorname{sh}x}{x}$.

【3058】 $\prod\limits_{n=0}^{\infty}(1+x^{2^n})=\frac{1}{1-x}\quad(|x|<1)$.

证 由于 $(1-x)P_n=(1-x)(1+x)\cdots(1+x^{2^n})=1-x^{2^{n+1}}$，从而(注意 $|x|<1$)，

$$P_n=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}\to\frac{1}{1-x}\qquad(\text{当 } n\to\infty \text{时}),$$

故 $\prod\limits_{n=0}^{\infty}(1+x^{2^n})=\frac{1}{1-x}$. 利用此题的结果，易得

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right]=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2,$$

此即 3054 题的结果.

【3059】 $\frac{\pi}{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots$.

提示 在 3056 题中，令 $x=\frac{\pi}{2}$，并利用半角公式即易获解.

证 在 3056 题中，令 $x=\frac{\pi}{2}$，利用半角公式，有

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\quad\cdots$$

则得

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots,$$

也即 $\frac{\pi}{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots$.

【3060】 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{3n-1}\cdot\frac{3n}{3n+1}\right)=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

提示 在 $\sin x$ 的无穷乘积展开中，令 $x=\frac{\pi}{3}$，即易获解..

证 利用函数 $\sin x$ 的无穷乘积展开 $\sin x=x\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$，令 $x=\frac{\pi}{3}$，有

$$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(3n)^2}\right)=\frac{\pi}{3}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-1)(3n+1)}{(3n)^2}.$$

于是，得 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{3n-1}\cdot\frac{3n}{3n+1}\right)=\frac{\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

试证下列无穷乘积的收敛性并求出其值：

【3061】 $\prod\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n^2-4}{n^2-1}$.

证 由于部分乘积

$$P_n=\frac{1\cdot5}{2\cdot4}\cdot\frac{2\cdot6}{3\cdot5}\cdot\frac{3\cdot7}{4\cdot6}\cdots\frac{(n-4)n}{(n-3)(n-1)}\cdot\frac{(n-3)(n+1)}{(n-2)n}\cdot\frac{(n-2)(n+2)}{(n-1)(n+1)}=\frac{n+2}{4(n-1)}\to\frac{1}{4}$$

（当 $n\to\infty$ 时），

故无穷乘积 $\prod\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n^2-4}{n^2-1}$ 收敛，且其值为 $\frac{1}{4}$.

【3062】 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{1}{n(n+2)}\right]$.

证 $1+\frac{1}{n(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$. 由于部分乘积

$$P_n=\frac{2^2}{1\cdot3}\cdot\frac{3^2}{2\cdot4}\cdot\frac{4^2}{3\cdot5}\cdots\frac{(n-1)^2}{(n-2)n}\cdot\frac{n^2}{(n-1)(n+1)}\cdot\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}=\frac{2(n+1)}{n+2}\to2\quad（当\ n\to\infty\ 时），$$

故无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{1}{n(n+2)}\right]$ 收敛，且其值为 2.

【3063】 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}$.

证 由于部分乘积

$$P_n=\frac{3\cdot9}{5\cdot7}\cdot\frac{5\cdot11}{7\cdot9}\cdot\frac{7\cdot13}{9\cdot11}\cdots\frac{(2n-3)(2n+3)}{(2n-1)(2n+1)}\cdot\frac{(2n-1)(2n+5)}{(2n+1)(2n+3)}\cdot\frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}$$

$$=\frac{3}{7}\cdot\frac{2n+7}{2n+3}\to\frac{3}{7}\qquad（当\ n\to\infty\ 时），$$

故无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}$ 收敛，且其值为 $\frac{3}{7}$.

【3064】 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}a^{\frac{(-1)^n}{n}}\quad(a>0)$.

证 由于部分乘积

$$P_n=a^{-1}\cdot a^{\frac{1}{2}}\cdots a^{\frac{(-1)^n}{n}}=a^{-\left[1-\frac{1}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right]}\to a^{-\ln2}\quad（当\ n\to\infty\ 时），$$

故无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}a^{\frac{(-1)^n}{n}}$ 收敛，且其值为 $a^{-\ln2}$.

【3065】 可否由乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\prod\limits_{n=1}^{n}q_n$ 的收敛性得出下列乘积：

(1) $\prod\limits_{n=1}^{n}(p_n+q_n)$； (2) $\prod\limits_{n=1}^{n}p_n^2$； (3) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_nq_n$； (4) $\prod\limits_{n=1}^{n}\frac{p_n}{q_n}$.

的收敛性？

提示 (1) 不可以. 例如，乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ 及 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

(2) 可以，且其值为 $P^2\ (P\neq0)$，其中 $P=\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$.

(3) 可以，且其值为 $PQ\ (P\neq0,Q\neq0)$，其中 $P=\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$，$Q=\prod\limits_{n=1}^{\infty}q_n$.

(4) 可以，且其值为 $\frac{P}{Q}\ (P\neq0,Q\neq0)$，其中 $P=\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$，$Q=\prod\limits_{n=1}^{\infty}q_n$.

解 (1) 不可以. 例如,乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2})$ 及 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n^2})$ 均收敛,但乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right]=\prod_{n=1}^{\infty}(2\cdot n^0)$ 却发散.

(2) 可以. 事实上,部分乘积 $Q_n=p_1^2\cdot p_2^2\cdots p_n^2=(p_1p_2\cdots p_n)^2$ 当 $n\to\infty$ 时的极限存在且为 P^2,故 $\prod_{n=1}^{\infty}p_n^2$ 收敛,且其值为 P^2,其中 $\prod_{n=1}^{\infty}p_n=P\neq0$.

(3) 可以. 事实上,部分乘积 $Q_n=(p_1p_2\cdots p_n)(q_1q_2\cdots q_n)$ 当 $n\to\infty$ 时的极限存在且为 PQ,故 $\prod_{n=1}^{\infty}p_nq_n$ 收敛,且其值为 PQ,其中 $\prod_{n=1}^{\infty}p_n=P\neq0$, $\prod_{n=1}^{\infty}q_n=Q\neq0$.

(4) 可以. 事实上,部分乘积 $Q_n=\frac{p_1p_2\cdots p_n}{q_1q_2\cdots q_n}(q_i\neq0,\ i=1,2,\cdots)$,当 $n\to\infty$ 时的极限存在且为 $\frac{P}{Q}$,故 $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{q_n}$ 收敛. 且其值为 $\frac{P}{Q}$,其中 $\prod_{n=1}^{\infty}p_n=P\neq0$, $\prod_{n=1}^{\infty}q_n=Q\neq0$.

研究下列无穷乘积的收敛性:

【3066】 $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

解 由于通项 $p_n=\frac{1}{n}\to0$(当 $n\to\infty$ 时),不满足收敛的必要条件($p_n\to1$);或者说:由于部分乘积

$$p_n=\frac{1}{n!}\to0\quad(\text{当 } n\to\infty \text{ 时}),$$

且每项不为零,故无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散于零.

【3067】 $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$.

解 注意通项 $p_n=\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}=1+\frac{1}{n(n+2)}$,而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ 收敛,且 $\frac{1}{n(n+2)}$ 不变号,故无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$ 收敛. 事实上,已由 3062 题知,该无穷乘积是收敛的,且其值为 2.

【3068】 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$.

提示 注意 $\frac{1}{n^p}$ 不变号以及级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 的敛散性.

解 $p_n=1+\frac{1}{n^p}$,其中 $\frac{1}{n^p}$ 不变号. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 时收敛,而当 $p\leqslant1$ 时发散,故无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n^p})$ 当 $p>1$ 时收敛,而当 $p\leqslant1$ 时发散.

【3069】 $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)$.

解 由于 $p_n-1=-\frac{1}{n}$ 不变号,且 $\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n})$ 发散,故原无穷乘积发散. 或由于部分乘积

$$P_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}$$

当 $n\to\infty$ 时的极限为零,且乘积中无一项为零,故原乘积发散于零.

【3070】* $\prod_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$.

解 通项 $p_n=\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p=\left(1-\frac{1}{n^2+1}\right)^p$. 由于级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{2}{n^2+1}\right)^p=p\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{2}{n^2+1}\right)$$

对任何 p 均收敛(因为级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2+1}$收敛),故原无穷乘积对任何 p 均收敛.

*) 原题误为 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$,这时,若 $p\geqslant 0$,第一个因子为零,按定义无穷乘积收敛于零;若 $p<0$,第一个因子无意义,因此整个无穷乘积无意义.

【3071】 $\prod\limits_{n=n_0}^{\infty}\frac{n^2+a_1n+b_1}{n^2+an+b}$,其中当 $n\geqslant n_0$ 时 $n^2+an+b>0$.

解 通项 $p_n=\frac{n^2+a_1n+b_1}{n^2+an+b}=1+\frac{(a_1-a)n+(b_1-b)}{n^2+an+b}$,令

$$a_n=\frac{(a_1-a)n+(b_1-b)}{n^2+an+b}.$$

当 $a_1=a$ 时,$a_n\sim\frac{1}{n^2}$. 由于 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,故原无穷乘积收敛. 当$a_1\neq a$时,由于 $n^2+an+b>0$,且 $a_n\sim\frac{a_1-a}{n}$,故 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}a_n$ 发散,从而,原无穷乘积也发散.

【3072】 $\prod\limits_{n=n_0}^{\infty}\frac{(n-a_1)(n-a_2)\cdots(n-a_p)}{(n-b_1)(b-b_2)\cdots(n-b_p)}$,其中 $n_0>b_i(i=1,2,\cdots,p)$.

解 $$p_n=\frac{(n-a_1)(n-a_2)\cdots(n-a_p)}{(n-b_1)(b-b_2)\cdots(n-b_p)}=1+\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{p}b_i-\sum\limits_{i=1}^{p}a_i\right)n^{p-1}+\cdots+(-1)^p\left(\prod\limits_{i=1}^{p}a_i-\prod\limits_{i=1}^{p}b_i\right)}{\prod\limits_{i=1}^{p}(n-b_i)}.$$

令

$$a_n=\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{p}b_i-\sum\limits_{i=1}^{p}a_i\right)n^{p-1}+\cdots+(-1)^p\left(\prod\limits_{i=1}^{p}a_i-\prod\limits_{i=1}^{p}b_i\right)}{\prod\limits_{i=1}^{p}(n-b_i)},$$

当 $\sum\limits_{i=1}^{p}a_i=\sum\limits_{i=1}^{p}b_i$ 时,$a_n=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$,故 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}a_n$ 收敛,从而,原无穷乘积收敛. 当 $\sum\limits_{i=1}^{p}a_i\neq\sum\limits_{i=1}^{p}b_i$ 时,由于当 $n>n_0$时,$\prod\limits_{i=1}^{p}(n-b_i)>0$,且 $a_n\sim\frac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{p}b_i-\sum\limits_{i=1}^{p}a_i\right)$,故级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}a_n$ 发散,从而,原无穷乘积也发散.

【3073】 $\prod\limits_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$.

解 $p_n=\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$, $\ln p_n=\frac{1}{2}\ln\frac{n+1}{n+2}=\frac{1}{2}\ln(1-\frac{1}{n+2})$.

由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\ln(1-\frac{1}{n+2})$发散(于$-\infty$),故原无穷乘积发散(于零).

【3074】 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

提示 注意级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=-\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$的敛散性.

解 $p_n=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$, $\ln p_n=-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right).$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ 收敛，从而，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收敛. 因此，无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ 收敛.

【3075】 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$.

解 $p_n = \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$，$\ln p_n = \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0$. 当 $n \to \infty$ 时，有

$$\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n^2},$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收敛，从而，原乘积也收敛.

【3076】 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{n}$.

解 $p_n = \sqrt[n^2]{n}$，$\ln p_n = \frac{1}{n^2}\ln n$. 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\ln n.$$

由于 $\frac{1}{n^2}\ln n = O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$，此处 ε 为满足 $0<\varepsilon<1$ 的任一常数，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ 收敛，故原无穷乘积收敛.

【3077】 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}$.

解 通项

$$p_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}} = \left(1+\frac{x}{n}\right)\left[1-\frac{x}{n}+\frac{x^2}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = 1-\frac{x^2}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

故若记 $p_n = 1+\alpha_n$，则当 n 充分大时，有

$$\alpha_n = -\frac{x^2}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) < 0,$$

保持不变号. 注意到对任何 x，级数

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left[-\frac{x^2}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

收敛，这里 n_0 为适当大的某一正整数. 从而，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 收敛. 因此，原无穷乘积收敛.

【3078】 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{x}{c+n}\right)e^{-\frac{x}{n}}$，其中 $c>0$.

解 对任意 x，考虑通项

$$p_n = \left(1-\frac{x}{c+n}\right)e^{-\frac{x}{n}} = \left(1-\frac{x}{c+n}\right)\left[1+\frac{x}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = 1-\frac{x}{c+n}+\frac{x}{n}-\frac{x^2}{n(c+n)}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= 1-\frac{x^2-cx}{n(c+n)}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

易知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收敛，故原无穷乘积收敛.

【3079】 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1-x^n)$.

解 当 $|x| \geqslant 1$ 时，由于通项 $p_n = 1-x^n \not\to 1$，即不满足收敛的必要条件，故原无穷级数发散. 当 $|x|<1$

时，若 $x=0$ 显然收敛；若 $x\neq 0$ 则有

$$\ln p_n=\ln(1-x^n)=-x^n\ln[(1-x^n)^{-\frac{1}{x^n}}].$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\ln[(1-x^n)^{-\frac{1}{x^n}}]=\lim_{y\to\infty}\ln\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]=1,$$

从而，$\ln p_n=O(|x|^n)$. 但级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|x|^n$ 当 $|x|<1$ 时收敛，故此时原无穷乘积收敛.

【3080】 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)$.

解 当 $|x|\geqslant 2$ 时，通项 $p_n=1+\left(\frac{x}{2}\right)^n\not\to 1$，故原无穷乘积发散. 当 $|x|<2$ 时，若 $x=0$ 显然收敛；若 $x\neq 0$，利用

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)^{\frac{2^n}{x^n}}=\lim_{y_n\to\infty}\left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n}=\mathrm{e},$$

就有

$$\ln p_n=\ln\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)=\frac{x^n}{2^n}\ln\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)^{\frac{2^n}{x^n}}=O\left(\left|\frac{x}{2}\right|^n\right).$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x}{2}\right|^n$ 当 $|x|<2$ 时收敛，从而，$\sum_{n=1}^{\infty}\ln p_n$ 收敛. 因此，原无穷乘积收敛.

【3081】 $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\right]$.

解 (1) 当 $|x|<\mathrm{e}$ 时，利用

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}+o(1)\qquad(\text{当 } n\to\infty \text{时}),$$

存在适当大的整数 n_0，当 $n\geqslant n_0$ 时，有 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>|x|$，于是，相应地得

$$\left|\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\right|=\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{|x|}\right]^n>1.$$

这表明，此时

$$p_n=1+\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\not\to 1\quad(\text{当 } n\to\infty \text{时}),$$

即不满足无穷乘积收敛的必要条件，故原无穷乘积发散.

(2) 当 $|x|=\mathrm{e}$ 时，利用 70 题的结果，有 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>\mathrm{e}-\frac{3}{n}$. 此时，得

$$p_n=1+(\operatorname{sgn}x)^n\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{\mathrm{e}^n}=1+(\operatorname{sgn}x)^n\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\mathrm{e}}\right]^n=1+\alpha_n.$$

但

$$|\alpha_n|=\left|(\operatorname{sgn}x)^n\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\mathrm{e}}\right]^n\right|=\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\mathrm{e}}\right]^n>\left[\frac{\mathrm{e}-\frac{3}{n}}{\mathrm{e}}\right]^n=\left(1-\frac{3}{\mathrm{e}}\cdot\frac{1}{n}\right)^n,$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{\mathrm{e}}\cdot\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{3}{n\mathrm{e}}\right)^{\frac{n\mathrm{e}}{3}}\right]^{\frac{3}{\mathrm{e}}}=\mathrm{e}^{-\frac{3}{\mathrm{e}}}>0,$$

故此时有 $\alpha_n \not\to 0$，也即 $p_n \not\to 1$（当 $n\to\infty$ 时），从而，原无穷乘积发散.

(3) 当 $|x|>\mathrm{e}$ 时，记 $p_n=1+\alpha_n$. 为考察 α_n 的变化，仍利用

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}+o(1)\qquad(n\to\infty),$$

存在适当大正整数 n_0，当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{1}{2}(\mathrm{e}+|x|).$$

记 $q=\frac{1}{2}\cdot\frac{|x|+\mathrm{e}}{|x|}$，则 $0<q<1$，有

$$|\alpha_n|=\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\right]=\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{|x|}\right]^n<\left[\frac{\frac{1}{2}(\mathrm{e}+|x|)}{|x|}\right]^n=q^n.$$

于是，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 绝对收敛. 由 $\ln p_n=\ln(1+\alpha_n)$，从而，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln p_n$ 绝对收敛. 因此，原无穷乘积收敛.

【3082】 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{\sqrt{n}}+\frac{x^2}{2n}}$.

解 对于任意 x，考虑通项

$$\begin{aligned}p_n&=\left(1-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{\sqrt{n}}+\frac{x^2}{2n}}\\&=\left(1-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\left[1+\left(\frac{x}{\sqrt{n}}+\frac{x^2}{2n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}+\frac{x^2}{2n}\right)^2+O\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)\right]\\&=\left[1+\frac{x}{\sqrt{n}}+\frac{x^2}{2n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{n}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)\right]+\left[-\frac{x}{\sqrt{n}}-\frac{x^2}{n}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)\right]=1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right).\end{aligned}$$

因此，若记 $p_n=1+\alpha_n$，则有 $\alpha_n=O\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)$. 于是，由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 的绝对收敛，可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\alpha_n)$ 绝对收敛，从而知，原无穷乘积收敛.

【3083】⁺ $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{n^p}\right)\cos\frac{x^n}{n^q}$.

解 (1) 当 $|x|<1$ 时，通项

$$\begin{aligned}p_n&=\left(1+\frac{x^n}{n^p}\right)\cos\frac{x^n}{n^p}=\left(1+\frac{x^n}{n^p}\right)\left[1+O\left(\frac{x^{2n}}{n^{2q}}\right)\right]=1+\frac{x^n}{n^p}+O\left(\frac{x^{2n}}{n^{2q}}\right)+O\left(\frac{x^{3n}}{n^{p+2q}}\right)\\&=1+O\left(\frac{x^n}{n^p}\right)+O\left(\frac{x^{3n}}{n^{p+2q}}\right).\end{aligned}$$

当 n 充分大时，不论 p,q 为何值，均有

$$\frac{x^n}{n^p}=O\left(|x|^{\frac{n}{2}}\right),\quad\frac{x^{3n}}{x^{p+2q}}=O\left(|x|^{\frac{n}{2}}\right).$$

于是，可写 $p_n=1+\alpha_n$，$\alpha_n=O(|x|^{\frac{n}{2}})$. 因此，有

$$|\ln p_n|=|\ln(1+\alpha_n)|=O(|\alpha_n|)=O(|x|^{\frac{n}{2}}).$$

由于当 $|x|<1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{|x|})^n<+\infty$，从而，$\sum\ln p_n$ 绝对收敛，故原无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 收敛.

(2) 当 $x=1$ 时，在 $p>1,q>\frac{1}{2}$ 的情况下，由于通项

$$\begin{aligned}p_n&=\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\cos\frac{1}{n^q}=\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\left[1-\frac{1}{2n^{2q}}+O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right)\right]=1+\frac{1}{n^p}-\frac{1}{2n^{2q}}+O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{p+4q}}\right)\\&=1+\frac{1}{n^p}+O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right),\end{aligned}$$

若记 $p_n=1+\alpha_n$，$\alpha_n=\frac{1}{n^p}+O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right)$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 绝对收敛，且由

$$\alpha_n^2=\frac{1}{n^{2p}}+O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{2q+p}}\right)=\frac{1}{n^{2p}}+O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right),$$

易知 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ 也收敛，故此时无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}p_n$ 收敛.

(3) 当 $x=-1$ 时，在 $p>\frac{1}{2}, q>\frac{1}{2}$ 的情况下，由于通项

$$p_n=\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)\cos\frac{(-1)^n}{n^q}=\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)\left[1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{2q}}+O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right)\right]$$
$$=1+\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{1}{2n^{2q}}+O\left(\frac{1}{n^{p+2q}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{p+4q}}\right)=1+\frac{(-1)^n}{n^p}+O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right),$$

可记 $p_n=1+\beta_n$，$\beta_n=\frac{(-1)^n}{n^p}+O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right)$，则有

$$\ln p_n=\ln(1+\beta_n)=\beta_n+O(\beta_n^2),$$

易见 $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$ 收敛，而

$$\beta_n^2=\frac{1}{n^{2p}}+O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{2q+p}}\right)=\frac{1}{n^{2p}}+O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right),$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^2$ 绝对收敛，从而知，$\sum_{n=1}^{\infty}\ln p_n$ 收敛. 于是，此时无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}p_n$ 收敛.

【3084】 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^p$.

解 显然应当要求 $x\neq0$. 记通项为 $p_n=(1+\alpha_n)^p$，其中

$$\alpha_n=\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}-1=\left[1-\frac{x^2}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-1=-\frac{x^2}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad(n\to\infty),$$

而
$$\ln p_n=p\ln(1+\alpha_n)=p\ln\left[1-\frac{x^2}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right].$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\alpha_n)$ 收敛*)，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln p_n$ 收敛，从而，原无穷乘积收敛(对任何的 p 及 $x\neq0$).

*) 参看 2677 题的结果.

【3085】 $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\ln(n+x)-\ln n}$.

解 记 $p_n=\sqrt[n]{\ln(n+x)-\ln n}$，由要求 $\ln(n+x)-\ln n\geqslant0$，知 $x\geqslant0$.

(1)当 $x=0$ 时，显然各项均为零，无穷乘积收敛于零.

(2)当 $x>0$ 时，由 $\ln p_n=\frac{1}{n}\ln\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$ 可知，当 $n\geqslant\frac{x}{e-1}$ 时，有 $\ln(1+\frac{x}{n})\leqslant1$，故此时 $\ln\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\leqslant0$. 再由

$$\frac{-\frac{1}{n}\ln\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\ln\frac{1}{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}\to+\infty$$

及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}\ln\ln(1+\frac{x}{n})$ 发散，从而得知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln p_n$ 发散. 因此，原无穷乘积发散.

【3086】 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2$ 收敛，则乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}\cos x_n$ 收敛.

证 当 $x\to0$ 时，$p_n=\cos x_n=1+\alpha_n$，其中

$$\alpha_n=-\frac{1}{2}x_n^2+o(x_n^2),\ \alpha_n\leqslant0,$$

且由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{x_n^2}{2}+o(x_n^2)\right]$收敛，故无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}\cos x_n$ 收敛.

【3087】 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 绝对收敛，则乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha_n\right)$ $(|\alpha_n|<\frac{\pi}{4})$ 收敛.

证 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛，故 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$. 此时有

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha_n\right)=\frac{1+\tan\alpha_n}{1-\tan\alpha_n}=(1+\tan\alpha_n)(1+\tan\alpha_n+\tan^2\alpha_n+\cdots)$$

$$=1+2\tan\alpha_n+2\tan^2\alpha_n+\cdots=1+2\alpha_n+o(\alpha_n).$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[2\alpha_n+o(\alpha_n)]$收敛，而且级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}[2\alpha_n+o(\alpha_n)]^2=\sum_{n=1}^{\infty}4\alpha_n^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n\cdot o(\alpha_n)\right]+\sum_{n=1}^{\infty}o^2(\alpha_n)$$

也收敛*)，故无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha_n\right)$ $\left(|\alpha_n|<\frac{\pi}{2}\right)$ 收敛.

*) 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 绝对收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2\leqslant\sum_{s=1}^{\infty}\left(|\alpha_{i_s}|\cdot|\alpha_{k_s}|\right)$，因而，$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ 也收敛. 又当 n 充分大时，有

$$|\alpha_n\cdot o(\alpha_n)|\leqslant|\alpha_n|,\quad |o^2(\alpha_n)|\leqslant|\alpha_n|,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n\cdot o(\alpha_n)\right]$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}o^2(\alpha_n)$ 均收敛.

研究下列无穷乘积的绝对收敛性和条件收敛性：

【3088】 $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]$.

解 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$条件收敛，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]^2$ 收敛，故原无穷乘积条件收敛.

【3089】 $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right]$.

解 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$条件收敛，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right]^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故原无穷乘积发散.

【3090】 $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right]$.

提示 就 $p>1$，$\frac{1}{2}<p\leqslant1$，$0<p\leqslant\frac{1}{2}$ 及 $p\leqslant0$ 四种情况加以讨论.

解 当 $p>1$ 时，由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$绝对收敛，故原无穷乘积绝对收敛.

当$\frac{1}{2}<p\leqslant1$ 时，由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$条件收敛及 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right]^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}$收敛，故原无穷乘积条件收敛.

当 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$时，由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}$发散，故原无穷乘积发散.

当 $p\leqslant0$ 时，由于$\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$不趋于零，故原无穷乘积也发散.

【3091】 $\prod_{n=2}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{\ln n}\right]$.

解 由于级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$条件收敛及 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}$发散*)，故原无穷乘积发散.

*） 当 n 充分大时，显然有 $n>\ln^2 n$，故 $\frac{1}{\ln^2 n}>\frac{1}{n}$. 由 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散即知 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}$ 发散.

【3092】 $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

解 记 $p_n=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}$，则有 $\ln p_n=\ln\left[1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}\right]$. 令 $u_k=\ln p_{2k}+\ln p_{2k+1}\ (k=1,2,3,\cdots)$，即得

$$u_k=\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{2k}+1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{2k+1}-1}\right)=\ln\left[1-\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}\right]>0.$$

由于

$$\lim_{k\to\infty}\ln\left[1-\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}\right]^{-\frac{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}}=1,$$

故有

$$u_k=-\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}\ln\left[1-\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}\right]^{-\frac{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}}$$

$$\sim-\left[\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}\right]\sim\frac{1}{2k}\quad(k\to\infty).$$

由此可知 $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ 发散，从而，级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\ln p_n$ 发散. 因此，原无穷乘积发散.

【3093】 $\prod_{n=1}^{\infty}n^{(-1)^n}$.

提示 令 $p_n=n^{(-1)^n}$，注意它的子数列 $p_{2k}=2k\to\infty\ (k\to\infty)$.

解 记 $p_n=n^{(-1)^n}$，则有子数列

$$p_{2k}=(2k)^{(-1)^{2k}}=2k\to\infty\quad(k\to\infty).$$

于是 $p_n\not\to 1\ (n\to\infty)$. 因此，原无穷乘积发散.

【3094】 $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$.

解 记 $p_n=\sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$，则有

$$\ln p_n=\frac{1}{n}\ln n^{(-1)^n}=\frac{(-1)^n}{n}\ln n.$$

注意到级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ 是莱布尼茨型级数，它条件收敛，因此，原无穷乘积条件收敛.

【3095】 $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}\right]$.

解 记 $p_n=1+\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}$，则有

$$|\ln p_n|=\frac{1}{n}\left|\ln\left[1+\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}\right]^{\frac{n}{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}}\right|\sim\frac{1}{n}\quad(n\to\infty).$$

因此，可知 $\sum_{n=1}^{\infty}|\ln p_n|$ 发散. 若令 $u_n=\ln p_n$，则有

$$u_{2k-1}=\ln\left[1+\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right],\quad u_{2k}=\ln\left[1+\frac{(-1)^k}{2k}\right]\quad(k=1,2,3,\cdots).$$

记 $a_k=u_{2k-1}+u_{2k}$，可得

$$a_k=\ln\left[1+\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}+\frac{(-1)^k}{2k}+\frac{(-1)^{2k-1}}{2k(2k-1)}\right]=\ln\left[1+\frac{(-1)^{k-1}-1}{2k(2k-1)}\right]\quad(k=1,2,3,\cdots),$$

故

$$a_{2m-1}=0,\quad a_{2m}=\ln\left[1-\frac{2}{4m(4m-1)}\right]\quad (m=1,2,3,\cdots).$$

于是,级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛.注意到 $u_k\to 0(k\to\infty)$,可得 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛.因此,原无穷乘积条件收敛.

【3096】 $\left(1+\frac{1}{\sqrt{1}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{9}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdots$.

解 研究无穷级数

$$\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{1}}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{9}}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots \tag{1}$$

的收敛性问题.今将级数(1)每三项依次加括号,考虑如此形成的新级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{4n-1}}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{4n+1}}\right)\right]. \tag{2}$$

以下将指出(2)发散,从而,(1)也发散,因此,原无穷乘积发散.现将(2)的通项记成

$$u_n=\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{4n-1}}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{4n+1}}\right). \tag{3}$$

则有

$$\begin{aligned}
u_n&=\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\ln\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{4n-1}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{4n+1}}\right)\right]\\
&=\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\ln\left[1-\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{4n+1}}+\frac{1}{\sqrt{16n^2-1}}\right]\\
&=\ln\left\{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left[1-\frac{\sqrt{4n-1}+\sqrt{4n+1}}{\sqrt{16n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{16n^2-1}}\right]\right\}\\
&=\ln\left[1+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{\sqrt{4n-1}+\sqrt{4n+1}}{\sqrt{16n^2-1}}-\frac{\sqrt{4n-1}+\sqrt{4n+1}}{\sqrt{n}\sqrt{16n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{16n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{16n^2-1}}\right]\\
&=\ln\left[1+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{2(\sqrt{n}+1)\left(\sqrt{1-\frac{1}{4n}}+\sqrt{1+\frac{1}{4n}}\right)-1}{\sqrt{16n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{16n^2-1}}\right]\\
&=\ln\left[1+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{2(\sqrt{n}+1)\left[1-\frac{1}{8n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)+1+\frac{1}{8n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-1}{\sqrt{16n^2-1}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right]\\
&=\ln\left[1+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{2(\sqrt{n}+1)\left[2+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-1}{\sqrt{16n^2-1}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right]\\
&=\ln\left[1+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{16n^2-1}}-\frac{3}{\sqrt{16n^2-1}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right]\\
&=\ln\left[1-\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{16n^2-1}(\sqrt{16n^2-1}+4n)}-\frac{3}{\sqrt{16n^2-1}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right]\\
&=\ln\left[1-\frac{3}{\sqrt{16n^2-1}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right]=\ln(1+\alpha_n),
\end{aligned}$$

其中 $\alpha_n=-\frac{3}{\sqrt{16n^2-1}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$,故 $\alpha_n\to 0$,且当 n 充分大时$\alpha_n<0$.

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{\sqrt{16n^2-1}}$发散,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 发散;因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\alpha_n)$发散.于是,原无

穷乘积发散.

【3097】 $\left(1+\frac{1}{1^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)^2\left(1+\frac{1}{3^\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{4^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{5^\alpha}\right)^2\left(1+\frac{1}{6^\alpha}\right)\cdots$.

解 记

$$q_1=1+\frac{1}{1^\alpha},\ q_2=\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)^2,\ q_3=1+\frac{1}{3^\alpha},q_4=1+\frac{1}{4^\alpha},\ q_5=\left(1-\frac{1}{5^\alpha}\right)^2,\ q_6=1+\frac{1}{6^\alpha},\cdots.$$

若记 $q_n=1+\alpha_n$,则

$$\alpha_1=\frac{1}{1^\alpha},\ \alpha_2=-\frac{2}{2^\alpha}+\frac{1}{2^{2\alpha}},\ \alpha_3=\frac{1}{3^\alpha},\alpha_4=\frac{1}{4^\alpha},\ \alpha_5=-\frac{2}{5^\alpha}+\frac{1}{5^{2\alpha}},\ \alpha_6=\frac{1}{6^\alpha},\cdots.$$

(i) 当 $\alpha>1$ 时,显然

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|=\frac{1}{1^\alpha}+\left(\frac{2}{2^\alpha}-\frac{1}{2^{2\alpha}}\right)+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\left(\frac{2}{5^\alpha}-\frac{1}{5^{2\alpha}}\right)+\frac{1}{6^\alpha}+\cdots. \tag{1}$$

是收敛的,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 绝对收敛.

(ii) 注意当 $\alpha\leqslant0$ 时,不可能有 $\lim\limits_{n\to\infty}q_n=1$,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 发散.

(iii) 今讨论 $0<\alpha\leqslant1$ 时的情形.将原无穷乘积写为

$$\left(1+\frac{1}{1^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{3^\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{4^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{5^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{5^\alpha}\right)$$
$$\cdot\left(1+\frac{1}{6^\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{7^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{8^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{8^\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{9^\alpha}\right)\cdots,$$

记

$$p_1=1+\frac{1}{1^\alpha},\ p_2=1-\frac{1}{2^\alpha},\ p_3=1-\frac{1}{2^\alpha},\ p_4=1+\frac{1}{3^\alpha},p_5=1+\frac{1}{4^\alpha},$$
$$p_6=1-\frac{1}{5^\alpha},\ p_7=1-\frac{1}{5^\alpha},\ p_8=1+\frac{1}{6^\alpha},\ p_9=1+\frac{1}{7^\alpha},\cdots.$$

又记

$$p_n=1+\alpha_n^* \qquad (n=1,2,3,\cdots).$$

为研究乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 的收敛性,考虑通项的表达式,有

$$\alpha_n^*=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+3k)^\alpha}, & n=4k+1,\\ -\dfrac{1}{(2+3k)^\alpha}, & n=4k+2 \text{ 或 } n=4k+3,\\ \dfrac{1}{(3+3k)^\alpha}, & n=4k+4\ (k=0,1,2,\cdots).\end{cases}$$

为考察级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^*$ 的收敛性,可看级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(1+3k)^\alpha}-\frac{2}{(2+3k)^\alpha}+\frac{1}{(3+3k)^\alpha}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}a_k$$

的收敛性,为此,估算通项 a_k,有

$$a_k=\frac{1}{(1+3k)^\alpha}-\frac{2}{(2+3k)^\alpha}+\frac{1}{(3+3k)^\alpha}=\left[\frac{1}{(1+3k)^\alpha}-\frac{1}{(2+3k)^\alpha}\right]-\left[\frac{1}{(2+3k)^\alpha}-\frac{1}{(3+3k)^\alpha}\right]$$
$$=\frac{\alpha}{(3k+1+\theta_1)^{\alpha+1}}-\frac{\alpha}{(3k+2+\theta_2)^{\alpha+1}}=\frac{\alpha(\alpha+1)}{[3k+1+\theta(1+\theta_2-\theta_1)]^{\alpha+2}}(1+\theta_2-\theta_1),$$

其中 $0<\theta_1<1$, $0<\theta_2<1$, $0<\theta<1$,显然,令 $\delta=1+\theta_2-\theta_1$,则有 $0<\delta<2$,且 $\theta(1+\theta_2-\theta_1)=\theta\delta\in(0,2)$.因而,

$$0<a_k=\frac{\alpha(\alpha+1)\delta}{(3k+1+\theta\delta)^{\alpha+2}}\leqslant\frac{2\alpha(\alpha+1)}{(3k+1)^{\alpha+2}}.$$

由 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(3k+1)^{\alpha+2}}$的收敛性知 $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^*$ 收敛. 但 α_n^* 变号，还需看级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^{*2}$. 易见

$$\alpha_n^{*2}=\begin{cases}\frac{1}{(1+3k)^{2\alpha}}, & n=4k+1,\\ \frac{1}{(2+3k)^{2\alpha}}, & n=4k+2 \text{ 或 } n=4k+3,\\ \frac{1}{(3+3k)^{2\alpha}}, & n=4k+4\ (k=0,1,2,\cdots).\end{cases}$$

无论哪种情形，均有

$$\frac{1}{\left(\frac{3}{4}n+\frac{9}{4}\right)^{2\alpha}}<\alpha_n^{*2}<\frac{1}{\left(\frac{3}{4}n+\frac{1}{4}\right)^{2\alpha}}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

因而当 $0<\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ 时，由上述左侧不等式，从级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{3}{4}n+\frac{9}{4}\right)^{2\alpha}}$ 的发散性，便知 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^{*2}$ 发散，从而，$\prod_{n=1}^{\infty}p_n$ 此时发散. 因此，$\prod_{n=1}^{\infty}q_n$ 也发散. 当 $\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$ 时，由上述不等式右侧部分，从级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{3}{4}n+\frac{1}{4}\right)^{2\alpha}}<+\infty$$

即知 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^{*2}$ 此时收敛. 从而，相应地 $\prod_{n=1}^{\infty}p_n$ 也收敛. 因此，$\prod_{n=1}^{\infty}q_n$，也收敛. 但由(1)式知(当 $\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$ 时) $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 发散，故当 $\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$ 时 $\prod_{n=1}^{\infty}q_n$ 条件收敛.

【3098】 证明：尽管级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots \tag{1}$$

发散，而乘积

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdots \tag{2}$$

收敛

证 设原级数(1)的通项为 u_n，则

$$u_{2k-1}=\frac{1}{\sqrt{k+1}}+\frac{1}{k+1}\quad u_{2k}=-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\quad(k=1,2,3,\cdots).$$

令 $a_k=u_{2k-1}+u_{2k}=\frac{1}{k+1}$. 显然，$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ 发散，故原级数(1)即 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 必然发散.

考虑原无穷乘积(2)所对应的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+u_n)$，则其通项 $v_n\to 0\ (n\to\infty)$，且

$$v_{2k-1}=\ln(1+u_{2k-1})=\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{k+1}}+\frac{1}{k+1}\right),$$

$$v_{2k}=\ln(1+u_{2k})=\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\quad(k=1,2,\cdots),$$

从而，

$$b_k=v_{2k-1}+v_{2k}=\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{k+1}}+\frac{1}{k+1}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)=\ln\left(1-\frac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}}\right).$$

因此，级数 $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ 收敛，从而可知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，故原无穷乘积(2)必收敛.

【3099】 证明：尽管级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ 二者发散，而乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$收敛，其中

$$\alpha_n=\begin{cases}-\dfrac{1}{\sqrt{k}}, & n=2k-1,\\ \dfrac{1}{\sqrt{k}}+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k\sqrt{k}}, & n=2k.\end{cases}$$

证 考虑 $\alpha_k=\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k}$，则有

$$\alpha_k=\frac{1}{k}+\frac{1}{k\sqrt{k}}\qquad(k=1,2,3,\cdots).$$

由于 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k\sqrt{k}}$收敛，而 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}$发散，即知正项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ 发散，从而，原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 发散.

再记 $b_k=\alpha_{2k-1}^2+\alpha_{2k}^2$，则有

$$b_k=\left(\frac{1}{k}\right)+\left(\frac{1}{k}+\frac{2}{k\sqrt{k}}+\frac{3}{k^2}+\frac{2}{k^2\sqrt{k}}+\frac{1}{k^3}\right)=\frac{2}{k}+\frac{2}{k\sqrt{k}}+\frac{3}{k^2}+\frac{2}{k^2\sqrt{k}}+\frac{1}{k^3}=\frac{2}{k}+O\left(\frac{1}{\sqrt{k^3}}\right).$$

由级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{k^3}}$收敛，而级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{2}{k}$发散，即知正项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k$ 发散，从而，原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ 发散.

再考虑原无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$所对应的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$，其中通项 $v_n=\ln(1+\alpha_n)$ $(n=1,2,3,\cdots)$. 考虑

$$\begin{aligned}c_k&=v_{2k-1}+v_{2k}=\ln(1+\alpha_{2k-1})+\ln(1+\alpha_{2k})\\&=\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k\sqrt{k}}\right)=\ln\left[1-\frac{1}{k}+\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)\right]=\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right).\end{aligned}$$

于是，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛. 注意到 $v_n\to0(n\to\infty)$，从而，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛. 因此，原无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$收敛.

【3100】 设 $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$(黎曼 ζ 函数)而 $p_n(n=1,2,\cdots)$是素数数列. 证明：$\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{p_n^x}\right)^{-1}=\zeta(x)$.

证 设 $x>1$. 首先，有

$$\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1}=\frac{1}{p_n^x}+\frac{1}{(p_n^2)^x}+\cdots+\frac{1}{(p_n^m)^x}+\cdots.$$

如果把对应于不超过正整数 N 的所有素数的有限个这种级数相乘起来，则部分乘积就等于

$$\prod_{p_n\leqslant N}\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1}=1+\frac{1}{n_1^x}+\frac{1}{n_2^x}+\cdots,$$

其中 $n_1,n_2,\cdots$是整数，它不包含超过 N 的素因子，显然 $1,2,\cdots,N$ 这种整数全被包含在 $n_1,n_2,\cdots$之中. 因此，

$$\left|\zeta(x)-\prod_{p_n\leqslant N}\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1}\right|=\left|\zeta(x)-1-\frac{1}{n_1^x}-\frac{1}{n_2^x}-\cdots\right|\leqslant\frac{1}{(N+1)^x}+\frac{1}{(N+2)^x}+\cdots\to0\quad(n\to\infty),$$

取极限即得 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{p_n^x}\right)^{-1}=\zeta(x)\quad(x>1)$.

【3101】 设 $p_n(n=1,2,\cdots)$是素数数列，证明：乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{p_n}\right)^{-1}$和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{p_n}$发散(欧拉).

证 与 3100 题的处理方法类似，考虑部分乘积，易见也有

$$\prod_{p_n\leqslant N}\frac{1}{1-\dfrac{1}{p_n}}>\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}.$$

由于当 $N\to+\infty$时，$\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{1}{n}$发散，故 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{p_n}\right)^{-1}$发散，且具有值$+\infty$.

由上述可知，$\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{p_n}\right)$发散于零. 又由于$\dfrac{1}{p_n}>0$，它始终不变号，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{p_n}$发散.

【3102】 设 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$，且$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=1+\dfrac{p}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)\ (\varepsilon>0)$，证明：$a_n=O^*\left(\dfrac{1}{n^p}\right)$.

证 考虑无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$，其中 $p_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^p$.

首先可证 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 是收敛的.事实上,考察其对应级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$,通项为

$$\ln p_n = \ln \frac{a_{n+1}}{a_n} + p\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = -\ln \frac{a_n}{a_{n+1}} + p\left[\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$= -\ln(1+\Delta_n)+\frac{p}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\Delta_n+O(\Delta_n^2)+\frac{p}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

这里 $\Delta_n=\frac{p}{n}+O\left(\frac{1}{n^{1+\epsilon}}\right)$ $(\epsilon>0)$,故有

$$\ln p_n = -\frac{p}{n}+\frac{p}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

但 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,故 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln p_n$ 收敛,从而,原无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛,记其值为 $k_0=\prod_{n=1}^{\infty} p_n$,则 $k_0\neq 0$,且 k_0 为一有限正数,再研究部分乘积 $P_N=a_1\prod_{n=1}^{N} p_n$.一方面,$P_N\to a_1k_0>0$(当 $N\to\infty$时);另一方面,由于

$$P_N=a_1\prod_{n=1}^{N}\frac{a_{n+1}}{a_n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p = a_{N+1}\prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p,$$

注意 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}+\beta$,其中 $\beta_n=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$,故当 N 充分大时,有

$$\ln\prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p = p\sum_{n\leqslant N}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=p\sum_{n\leqslant N}\left(\frac{1}{n}+\beta_n\right)=p\left[\ln N+C+O\left(\frac{1}{N}\right)+\sum_{n=1}^{N}\beta_n\right]$$

$$=p\left[\ln N+C+B+O\left(\frac{1}{N}\right)\right]=p\left[\ln N+C_0+O\left(\frac{1}{N}\right)\right],$$

其中 C 为 Euler 常数,$C>0$,$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n=B$ 是一常数,而

$$\sum_{n=1}^{N}\beta_n=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n+O\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)=B+O\left(\frac{1}{N}\right),$$

$C_0=C+B$ 是一常数.于是,

$$\prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p=e^{p[\ln N+C_0+O(\frac{1}{N})]}=N^p\cdot G_N,$$

其中 $G_N=e^{C_0p+O(\frac{1}{N})}\to e^{C_0p}>0$ $(N\to+\infty)$.这样一来,就有

$$0<a_1k_0=\lim_{N\to\infty}P_N=\lim_{N\to\infty}\left[a_{N+1}\prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p\right]$$

$$=\lim_{N\to\infty}[a_{N+1}N^pG_N]=\lim_{N\to\infty}(a_{N+1}N^p)\cdot\lim_{N\to\infty}G_N=e^{C_0p}\lim_{N\to\infty}(a_{N+1}N^p).$$

上述式子中的各个极限运算是允许的,因为 P_N 及 G_N 的极限存在,且 G_N 的极限不为零,故 $a_{N+1}N^p=\frac{P_N}{G_N}$的极限存在.因此,就有

$$\lim_{N\to\infty}(a_{N+1}N^p)=\frac{a_1k_0}{e^{C_0p}}\quad(\text{非零常数}).$$

这表明 a_{N+1}与$\frac{1}{N^p}$为同级无穷小量,或者说,a_N 与$\frac{1}{(N-1)^p}$为同级无穷小量,但$\frac{1}{(N-1)^p}$与$\frac{1}{N^p}$同级,故最后得:a_N 与$\frac{1}{N^p}$是同级无穷小量,也即当 N 充分大时,有 $a_N=O^*\left(\frac{1}{N^p}\right)$.

【3103】 利用沃利斯公式证明:$\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

证 沃利斯公式为 $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2n-1}\frac{2n}{2n+1}=\frac{\pi}{2}$,即$\lim_{n\to\infty}\left\{\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1}\right\}=\frac{\pi}{2}$,或

$$\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\sim\frac{2}{\pi(2n+1)}.$$

上式两端开方，即得 $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

【3104】 证明：表示式 $a_n=\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ 当 $n\to\infty$ 时有异于零的极限 A.

由此推出斯特林公式 $n!=An^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}(1+\varepsilon_n)$，其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$ 和 $A=\sqrt{2\pi}$.

证 按题设我们可得 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e}$. 下证不等式：

$$e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}<e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}, \tag{1}$$

证明了这一点，即可知 $a_{n+1}<a_n$，从而，$\{a_n\}$ 为递减数列. 事实上，在等式 $\ln\frac{1+x}{1-x}=2x(1+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+\cdots)$ 中令 $x=\frac{1}{2n+1}$，即得

$$\ln\frac{n+1}{n}=\frac{2}{2n+1}\left[1+\frac{1}{3(2n+1)^2}+\frac{1}{5(2n+1)^4}+\cdots\right],$$

也即

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{3(2n+1)^2}+\frac{1}{5(2n+1)^4}+\cdots.$$

上式右端显然大于1，但小于

$$1+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots\right]=1+\frac{1}{12n(n+1)}.$$

因此，我们有

$$1<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1+\frac{1}{12n(n+1)}.$$

由此，取指数(底为 e)，即得(1)式：

$$e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}<e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

由上述不等式，即可推知：

$$0<a_{n+1}<a_n\ (n=1,2,\cdots)\quad 及\quad a_n e^{-\frac{1}{12n}}<a_{n+1}e^{-\frac{1}{12(n+1)}}.$$

由此可见，数列 $\{a_n\}$ 为单调递减且有下界的数列，因此，它有有限极限 A；而数列 $\{a_n e^{-\frac{1}{12n}}\}$ 为单调递增且有上界：$a_n e^{-\frac{1}{12n}}<a_n<a_1$，故也有极限. 由于 $e^{-\frac{1}{12n}}\to 1(n\to\infty)$，故这两个数列有同一极限 A. 由于对任何的 n，不等式 $a_n e^{-\frac{1}{12n}}<A<a_0$ 成立，故在 0 与 1 之间存在这样的 θ，使得

$$A=a_n e^{-\frac{\theta}{12n}}\quad 或\quad a_n=Ae^{\frac{\theta}{12n}}.$$

因此，$\frac{n!\ e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}=Ae^{\frac{\theta}{12n}}$，即

$$n!\ =An^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^{\frac{\theta}{12n}}\quad(\theta=\theta(n);\ 0<\theta<1),\quad 或\quad n!=An^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}(1+\varepsilon_n),$$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$.

现在我们来确定常数 A，将沃利斯公式

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2$$

稍加变形，并将 $n!$ 的表达式代入，即得

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left\{\frac{[(2n)!!]^2}{(2n)!}\right\}^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left\{\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right\}^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left\{\frac{2^{2n}A^2n^{2n+1}e^{-2n}e^{\frac{\theta}{6n}}}{A\cdot 2^{2n+\frac{1}{2}}n^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}e^{\frac{\theta}{24n}}}\right\}^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+1}A^2\cdot\frac{n}{2}e^{\frac{\theta}{4n}}\right)=\frac{A^2}{4}.$$

由此得 $A^2=2\pi$ 或 $A=\sqrt{2\pi}$ $(A>0)$.

于是,最后证得斯特林公式为

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}\quad(0<\theta<1).$$

用上式可估计很大的 n 时阶乘 $n!$ 的值.

【3105】 根据欧拉的定义 Γ 函数 $\Gamma(x)$ 由下面的公式来确定:

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

由这个公式出发:(1)将函数 $\Gamma(x)$ 表示为无穷乘积的形状;(2)证明:$\Gamma(x)$ 对于不为负整数的一切实数 x 皆有意义;(3)推出下面这个性质:$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$;(4)对于正整数 n 求 $\Gamma(n)$ 之值.

解 (1) 由于

$$\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}=\frac{n^x}{x}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)}$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{1}\right)^x\left(1+\frac{1}{2}\right)^x\cdots\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^x\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x},$$

故得 $\Gamma(x)=\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}$.

(2) 由上面 $\Gamma(x)$ 写成无穷乘积的过程,得知 $x\neq-n(n=0,1,2,\cdots)$,即当 x 为非负整数时 $\Gamma(x)$ 才允许写成上述形式.另一方面,由于

$$p_n=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}=1+\alpha_n\quad(n=1,2,\cdots),$$

而 $\alpha_n=\frac{x(x-1)}{2n^2}+O(\frac{1}{n^3})$,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 绝对收敛,从而,无穷乘积

$$\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}p_n=\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}$$

绝对收敛,也即 $\Gamma(x)$ 对于 $x\neq-n$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 的一切实数 x 皆有意义.

(3) 由于

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!\ n^{x+1}}{(x+1)\cdots(x+n+1)}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!\ n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n!\ n^{x+1}}{(x+1)\cdots(x+n+1)}}{\frac{n!\ n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{x+n+1}=x,$$

故 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

(4) 令 $x=n-1$,即得 $\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)=(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)=\cdots=(n-1)!$.

【3106】 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可以积分,且

$$\delta_n=\frac{b-a}{n},\quad f_{in}=f(a+i\delta_n)\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}(1+\delta_n f_{in})=e^{\int_a^b f(x)dx}$.

证 令 $y_n=\prod_{i=1}^{n}(1+\delta_n f_{in})$,则

$$\ln y_n=\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\delta_n f_{in})=\sum_{i=1}^{n}[f_{in}\delta_n+O(\delta_n^2)]=\sum_{i=1}^{n}f_{in}\delta_n+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

于是，

$$\lim_{n\to\infty}\ln y_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{n}f_{in}\delta_n+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{i=1}^{n}(1+\delta_n f_{in})=\mathrm{e}^{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$. 证毕.

【3107】 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{\prod\limits_{i=0}^{n-1}(a+ib)}}{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}(a+ib)}=\dfrac{2}{\mathrm{e}}$ *)，其中 $a>0$ 和 $b>0$.

证 记 $t=\dfrac{b}{a}$，则 $t>0$，有

$$S_n=\frac{\sqrt[n]{\prod\limits_{i=0}^{n-1}(a+ib)}}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}(a+ib)}=\frac{\sqrt[n]{a^n}\sqrt[n]{\prod\limits_{i=0}^{n-1}(1+it)}}{\frac{a}{n}\prod\limits_{i=0}^{n-1}(1+it)}=\frac{\sqrt[n]{\prod\limits_{i=0}^{n-1}(1+it)}}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}(1+it)}.$$

注意，当 n 充分大时，可算得

$$\sum_{i=0}^{n-1}(1+it)=n+t\sum_{i=0}^{n-1}i=n+\frac{t}{2}(n-1)n=\frac{t}{2}n^2+O(n).$$

记 $Q_n=\sqrt[n]{\prod\limits_{i=0}^{n-1}(1+it)}$，考虑

$$\begin{aligned}\ln Q_n&=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln(1+it)=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln\left[\frac{1+it}{1+nt}(1+nt)\right]=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln(1+nt)+\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln\frac{1+it}{1+nt}\\&=\ln(1+nt)+\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(1-\Delta_i),\end{aligned}$$

其中

$$\Delta_i=1-\frac{1+it}{1+nt}=\frac{(n-i)t}{1+nt}\ (i=0,1,2,\cdots,n-1),$$

故得

$$\begin{aligned}\ln Q_n&=\ln(nt)+\ln\left(1+\frac{1}{nt}\right)+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\ln\left(1-\frac{t}{1+nt}j\right)\\&=\ln(nt)+O\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{tj}{1+nt}\right)^k\\&=\ln(nt)+O\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{t}{1+nt}\right)^k\sum_{j=1}^{n}j^k\\&=\ln(nt)+O\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{t}{1+nt}\right)^k\left[\frac{1}{k+1}n^{k+1}+O(n^k)\right]\\&=\ln(nt)+O\left(\frac{1}{n}\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}\left(\frac{nt}{1+nt}\right)^k+O\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{nt}{1+nt}\right)^k\right]\\&=\ln(nt)-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\left(\frac{nt}{1+nt}\right)^k+O\left(\frac{1}{n}\ln n\right)\\&=\ln(nt)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{nt}{1+nt}\right)^k+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}\left(\frac{nt}{1+nt}\right)^k+O\left(\frac{1}{n}\ln n\right)\\&=\ln(nt)+\ln\left(1-\frac{nt}{1+nt}\right)+\left(\frac{1+nt}{nt}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}\left(\frac{nt}{1+nt}\right)^{k+1}+O\left(\frac{1}{n}\ln n\right)\end{aligned}$$

$$=\ln(nt)+\ln\frac{1}{1+nt}+\frac{1+nt}{nt}\left[\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s}\left(\frac{nt}{1+nt}\right)^{s}-\frac{nt}{1+nt}\right]+O\left(\frac{1}{n}\ln n\right)$$

$$=\ln(nt)-\ln(1+nt)-\frac{1+nt}{nt}\ln\left(1-\frac{nt}{1+nt}\right)-1+O\left(\frac{1}{n}\ln n\right)$$

$$=\ln(nt)-\ln(1+nt)-\ln\frac{1}{1+nt}-1+O\left(\frac{1}{n}\ln n\right)=\ln(nt)-1+O\left(\frac{1}{n}\ln n\right).$$

于是，$Q_n=\frac{nt}{e}\,e^{O(\frac{1}{n}\ln n)}$，因而，有

$$S_n=\frac{Q_n}{\frac{t}{2}n+O(1)}=\frac{\frac{nt}{e}\,e^{O(\frac{1}{n}\ln n)}}{\frac{t}{2}n+O(1)}=\frac{2}{e}\,\frac{e^{O(\frac{1}{n}\ln n)}}{1+O\left(\frac{1}{n}\right)},$$

最后得$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{2}{e}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{O(\frac{1}{n}\ln n)}}{1+O\left(\frac{1}{n}\right)}=\frac{2}{e}$. 证毕.

*）原题实际上为由序列$\{a+ib\}$的几何平均与算术平均之比的极限，分母应为$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}(a+ib)$，而不是$\sum\limits_{i=0}^{n-1}(a+ib)$，这样改更确切些.

【3108】 设 $f_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$在区间(a,b)内为连续函数且$|f_n(x)|\leqslant c_n\ (n=1,2,\cdots)$，其中级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$收敛. 证明：函数 $F(x)=\prod\limits_{n=1}^{\infty}[1+f_n(x)]$在区间$(a,b)$内是连续的.

证 （i）首先证明上述乘积对任何 $x\in(a,b)$是收敛的. 注意级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$收敛，故 $c_n\to0$（当 $n\to\infty$时），因而，$f_n(x)\to0$（当 $n\to\infty$时），故存在正整数 N_0，当 $n\geqslant N_0$ 时，有$|f_n(x)|<\delta$，此处 δ 可事先取$(0,1)$内的任一实数. 现在只要研究乘积 $\prod\limits_{n=N_0+1}^{\infty}[1+f_n(x)]$ 的收敛性即可，或改写

$$\prod_{n=N_0+1}^{\infty}[1+f_n(x)]=\prod_{k=1}^{\infty}[1+g_k(x)],\tag{1}$$

其中 $g_k(x)=f_{N_0+k}(x)\ (k=1,2,\cdots)$. 如能证明

$$G(x)=\prod_{k=1}^{\infty}[1+g_k(x)]\tag{2}$$

是收敛的，以及下面再证 $G(x)$是连续的，那么

$$F(x)=G(x)\prod_{n=1}^{N_0}[1+f_n(x)]\tag{3}$$

当然是收敛的而且是连续的. 今研究(2)式，其中$|g_n(x)|<\delta$，因而，$1+g_n(x)>0\ (n=1,2,\cdots)$. 现在考察乘积对应的另一级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}g_n(x)$. 显然，由$|g_n(x)|\leqslant c_{N_0+n}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_{N_0+n}$收敛，便知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}g_n(x)$绝对收敛. 因此，原无穷乘积(2)(绝对)收敛.

（ii）再证 $G(x)$的连续性. 注意当 $x\in(a,b)$时 $G(x)>0$，故可考虑它的对数函数 $L(x)=\ln G(x)$. 若能证得 $L(x)$为(a,b)内的连续函数，则就可得知 $G(x)$也在(a,b)内连续. 由于

$$L(x)=\ln G(x)=\ln\prod_{n=1}^{\infty}[1+g_n(x)]=\sum_{n=1}^{\infty}\ln[1+g_n(x)]$$

以及$|g_n(x)|\leqslant c_{N_0+n}$，$c_{N_0+n}\to0\ (n\to\infty)$，再注意到$\lim\limits_{u\to0}\frac{\ln(1+u)}{u}=1$，即知：当 n 充分大时$(n>N^*)$，对一切 $x\in(a,b)$皆有

$$|\ln[1+g_n(x)]|\leqslant2|g_n(x)|\leqslant2c_{n+N_0}.$$

根据 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{n+N_0}$ 的收敛性知，$L(x)$ 为一在区间 (a,b) 内一致收敛的连续函数项级数之和. 因而 $L(x)$ 在 (a,b) 内为一连续函数. 从而，$G(x)$ 在 (a,b) 内连续. 因此，最后得知 $F(x)$ 在 (a,b) 内连续. 证毕.

【3109】 求函数 $F(x)=\prod_{n=1}^{\infty}[1+f_n(x)]$ 的导数之表达式. $F'(x)$ 存在的充分条件为何?

解 首先假定 $1+f_n(x)\neq 0$ $(a<x<b, n=1,2,\cdots)$. 如果在区间 (a,b) 内的任意一点 x 上，均有 $\{f_n(x)\}$ 绝对收敛，也即

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|<+\infty \quad (x\in(a,b)), \tag{1}$$

那么，显然无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}[1+f_n(x)]$ 在 (a,b) 内(绝对)收敛且 $F(x)\neq 0$. 考虑函数

$$G(x)=\ln|F(x)|. \tag{2}$$

为研究取 $F(x)$ 的导数的计算式，先对(2)作形式求导，有

$$G'(x)=\frac{F'(x)}{F(x)} \quad 或 \quad F'(x)=F(x)G'(x). \tag{3}$$

今再研究 $G'(x)$，即研究形式导数

$$\begin{aligned}G'(x)&=\left(\ln\left|\prod_{n=1}^{\infty}[1+f_n(x)]\right|\right)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\ln|1+[f_n(x)]|\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(\ln|1+f_n(x)|)'\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)}.\end{aligned} \tag{4}$$

为使(4)式的一切运算有意义，我们可给出如下充分条件：$f_n(x)$ 可导，且

$$|f_n'(x)|\leqslant c_n,\ \sum_{n=1}^{\infty}c_n<+\infty\ (x\in(a,b)). \tag{5}$$

下面我们证明：在条件(1)、(5)之下，$F(x)$ 在 (a,b) 内可导，且

$$F'(x)=F(x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)}. \tag{6}$$

只要证明(6)式对 (a,b) 内的任一点 x_0 成立. 设 $x_0\in(a,b)$ 已取定. 取 a_1,b_1 使 $a<a_1<x_0<b_1<b$. 首先，证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)| \tag{7}$$

在 (a_1,b_1) 内一致收敛，注意到 $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x_0)|$ 的收敛性，为此又只要证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)-f_n(x_0)| \tag{8}$$

在 (a_1,b_1) 内一致收敛. 但根据(5)式，有：当 $x\in(a_1,b_1)$ 时，

$$|f_n(x)-f_n(x_0)|=|f_n'(\xi_n)(x-x_0)|\leqslant(b_1-a_1)c_n \quad (n=1,2,3,\cdots), \tag{9}$$

其中 $x_0\leqslant\xi_n\leqslant x$. 由 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 的收敛性，根据魏尔斯特拉斯判别法知级数(8)，从而，级数(7)在 (a_1,b_1) 内一致收敛. 于是，必有正整数 N 存在，使当 $n>N$ 时，对一切 $x\in(a_1,b_1)$，恒同时满足下面两个不等式：

$$|f_n(x)|<\frac{1}{2}, \tag{10}$$

$$|\ln[1+f_n(x)]|\leqslant 2|f_n(x)|, \tag{11}$$

由(10)式与(5)式又知：当 $n>N$ 时，对一切 $x\in(a_1,b_1)$，有

$$\left|\frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)}\right|\leqslant 2c_n. \tag{12}$$

根据(11)式与(12)式，注意到级数(7)在 (a_1,b_1) 内的一致收敛性知，$\sum_{n=1}^{\infty}\ln|1+f_n(x)|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)}$ 都

在(a_1,b_1)内一致收敛. 从而知(4)式中的逐项求导是允许的，即$G(x)$在(a_1,b_1)内可导，且(4)式成立. 由(2)式知

$$|F(x)|=e^{G(x)}. \tag{13}$$

由(9)式得：当$a_1<x<b_1$时，

$$|f_n(x)|\leqslant(b_1-a_1)c_n+|f_n(x_0)|=d_n \quad (n=1,2,3,\cdots),$$

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}d_n$收敛，故根据3108题的结果可知，$F(x)$在$(a_1,b_1)$内连续. 但前面已述$F(x)\neq0$，故在$(a_1,b_1)$内或是$F(x)$恒大于零，这时(13)式为

$$F(x)=e^{G(x)} \quad (a_1<x<b_1); \tag{14}$$

或是$F(x)$恒小于零，这时(13)式为

$$F(x)=-e^{G(x)} \quad (a_1<x<b_1). \tag{15}$$

在(14)式成立的情形，由$G(x)$在(a_1,b_1)内可导知，$F(x)$在(a_1,b_1)内可导，且[注意到(4)式]

$$F'(x)=e^{G(x)}G'(x)=F(x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f'_n(x)}{1+f_n(x)};$$

在(15)式成立的情形下，由$G(x)$在(a_1,b_1)内可导知，$F(x)$在(a_1,b_1)内可导，且[注意到(4)式]

$$F'(x)=-e^{G(x)}G'(x)=F(x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f'_n(x)}{1+f_n(x)},$$

在(a_1,b_1)内(6)式必成立. 特别在点x_0成立.

总之，在条件(1)和条件(5)之下，再假定$1+f_n(x)\neq0$ $(a<x<b,\ n=1,2,3,\cdots)$即可推出在(a,b)内$F'(x)$存在且公式(6)成立.

【3110】 证明：若$0<x<y$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x(x+1)\cdots(x+n)}{y(y+1)\cdots(y+n)}=0$.

证 记$p_n=\dfrac{x+n}{y+n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$. 显然，$0<p_n<1$. 由题意，现在要证无穷乘积$\dfrac{x}{y}\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$发散到零. 因为部分乘积$\prod\limits_{k=1}^{n}p_k$是正的且递减，故只要证明它是发散的就行了. 为此先估计一下$p_n=1+\alpha_n$，则有

$$\alpha_n=p_n-1=\frac{1+\frac{x}{n}}{1+\frac{y}{n}}-1=\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{y}{n}\right)^{-1}-1=\left(1+\frac{x}{n}\right)\left[1-\frac{y}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-1$$

$$=\left[1-\frac{y-x}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-1=-\frac{y-x}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

故当n适当大时，α_n保持定号. 但由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{y-x}{n}$发散，即知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$发散. 因此，原无穷乘积发散，即它发散到零. 于是，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{y(y+1)\cdots(y+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{y}\prod_{k=1}^{n}\frac{x+k}{y+k}=\frac{x}{y}\prod_{k=1}^{\infty}p_k=0.$$

证毕.

§10. 斯特林公式

斯特林公式

$$n!=\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}} \quad (0<\theta_n<1),$$

可用来计算当值n甚大时的$n!$.

利用斯特林公式，近似地计算：

【3111】 lg100!.

解 $\lg 100! = \lg\left\{\sqrt{2\pi\cdot 100}\cdot 100^{100}\mathrm{e}^{-100}\mathrm{e}^{\frac{\theta}{12\cdot 100}}\right\}$

$$=\frac{1}{2}(\lg 2+\lg\pi+\lg 100)+100\lg 100-100\lg\mathrm{e}+\frac{\theta}{1200}\lg\mathrm{e}$$

$$=\frac{1}{2}(0.3010+0.4971+2)+200-100\cdot 0.4343+0.0004\theta$$

$$=157.9691+0.0004\theta,$$

其中 $0<\theta<1$.

【3112】+ $1\cdot 3\cdot 5\cdots 1999$.

解 $1\cdot 3\cdot 5\cdots 1999=\dfrac{2000!}{2^{1000}\cdot 1000!}=\dfrac{\sqrt{2\pi\cdot 2000}\cdot 2000^{2000}\mathrm{e}^{-2000}\mathrm{e}^{\frac{\theta_1}{24000}}}{2^{1000}\sqrt{2\pi\cdot 1000}\cdot 1000^{1000}\mathrm{e}^{-1000}\mathrm{e}^{\frac{\theta_2}{12000}}}$

$$=7.09\cdot 10^{2866}\mathrm{e}^{\frac{\theta}{12000}}\approx 7.09\cdot 10^{2866}\left(1+\frac{\theta}{12000}\right),$$

其中 $|\theta|<1$ $(0<\theta_1<1,\ 0<\theta_2<1)$.

【3113】 $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 99}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 100}$.

解 $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 99}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 100}=\dfrac{100!}{2^{100}(50!)^2}=\dfrac{\sqrt{2\pi\cdot 100}\cdot 100^{100}\mathrm{e}^{-100}\mathrm{e}^{\frac{\theta_1}{1200}}}{2^{100}\cdot 100\pi\cdot 50^{100}\mathrm{e}^{-100}\mathrm{e}^{\frac{\theta_2}{300}}}=0.0798\mathrm{e}^{\frac{\theta}{300}}$

$$\approx 0.0798\left(1+\frac{\theta}{300}\right),$$

其中 $|\theta|<1$ $(0<\theta_1<1, 0<\theta_2<1)$.

【3114】 C_{100}^{40}.

解 $C_{100}^{40}=\dfrac{100!}{40!\cdot 60!}=\dfrac{\sqrt{200\pi}\cdot 100^{100}\mathrm{e}^{-100}\mathrm{e}^{\frac{\theta_1}{1200}}}{\sqrt{2\pi\cdot 40}\sqrt{2\pi\cdot 60}\cdot 60^{60}\cdot 40^{40}\mathrm{e}^{-100}\mathrm{e}^{\frac{\theta_2}{480}+\frac{\theta_3}{720}}}=10^{28}\cdot 1.378\mathrm{e}^{\frac{\theta}{288}}$

$$\approx 10^{28}\cdot 1.378\left(1+\frac{\theta}{288}\right),$$

其中 $|\theta|<1$ $(0<\theta_1<1, 0<\theta_2<1, 0<\theta_3<1)$.

【3115】 $\dfrac{100!}{20!\,30!\,50!}$.

解 $\dfrac{100!}{20!\,30!\,50!}=\dfrac{\sqrt{2\pi\cdot 100}\cdot 100^{100}\mathrm{e}^{-100}\mathrm{e}^{\frac{\theta_1}{1200}}}{\sqrt{2^3\pi^3 20\cdot 30\cdot 50}\cdot 20^{20}\cdot 30^{30}\cdot 50^{50}\mathrm{e}^{-100}\mathrm{e}^{\frac{\theta_2}{240}+\frac{\theta_3}{360}+\frac{\theta_4}{600}}}$

$$=10^{42}\cdot 4.792\,\mathrm{e}^{\frac{\theta}{120}}\approx 10^{42}\cdot 4.792\left(1+\frac{\theta}{120}\right),$$

其中 $|\theta|<1$ $(0<\theta_1<1, 0<\theta_2<1, 0<\theta_3<1, 0<\theta_4<1)$.

【3116】 $\int_0^1(1-x^2)^{50}\mathrm{d}x$.

解 $\int_0^1(1-x^2)^{50}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{101}t\mathrm{d}t=\dfrac{(100)!!}{(101)!!}=\dfrac{2^{100}\cdot(50!)^2}{101!}=\dfrac{2^{100}\cdot 100\pi\cdot 50^{100}\mathrm{e}^{-100}\mathrm{e}^{\frac{\theta_1}{300}}}{101\sqrt{2\pi\cdot 100}\cdot 100^{100}\mathrm{e}^{-100}\mathrm{e}^{\frac{\theta_2}{1200}}}$

$$=\frac{10\sqrt{\pi}}{101\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\frac{\theta}{300}}=0.1241\mathrm{e}^{\frac{\theta}{300}}\approx 0.1241\left(1+\frac{\theta}{300}\right),$$

其中 $|\theta|<1$ $(0<\theta_1<1, 0<\theta_2<1)$.

【3117】 $\int_0^{2\pi}\sin^{200}x\mathrm{d}x$.

解题思路 先将$[0,2\pi]$分成$[0,\frac{\pi}{2}]$,$[\frac{\pi}{2},\pi]$,$[\pi,\frac{3}{2}\pi]$及$[\frac{3\pi}{2},2\pi]$四个子区间,然后对在这些子区间上的定积分,分别作代换$x=t$,$x=\frac{\pi}{2}+t$,$x=t+\pi$及$x=\frac{3\pi}{2}+t$,易得

$$\int_0^{2\pi}\sin^{200}x\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{200}x\mathrm{d}x.$$

最后,利用2281题的结果及斯特林公式,可得原式近似等于$0.355\left(1+\frac{\theta}{600}\right)$,其中$|\theta|<1$.

解 先将$\int_0^{2\pi}$分成$\int_0^{\frac{\pi}{2}}$,$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$,$\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}$及$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$四部分,然后分别作代换$x=t$,$x=t+\frac{\pi}{2}$,$x=t+\pi$,及$x=t+\frac{3\pi}{2}$,再利用结果$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\mathrm{d}t$,易得

$$\int_0^{2\pi}\sin^{200}x\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{200}x\mathrm{d}x.$$

利用2281题的结果及斯特林公式,最后得

$$\int_0^{2\pi}\sin^{200}x\mathrm{d}x=4\frac{(199)!!}{(200)!!}\frac{\pi}{2}=\frac{200!}{2^{200}(100!)^2}\cdot 2\pi=\frac{2\pi\sqrt{2\pi\cdot 200}\cdot 200^{200}\mathrm{e}^{-200}\mathrm{e}^{\frac{\theta_1}{2400}}}{2^{200}\cdot 200\pi\cdot 100^{200}\mathrm{e}^{-200}\mathrm{e}^{\frac{\theta_2}{600}}}$$

$$=0.355\mathrm{e}^{\frac{\theta}{600}}\approx 0.355\left(1+\frac{\theta}{600}\right),$$

其中$|\theta|<1$ $(0<\theta_1<1,0<\theta_2<1)$.

【3118】 推出乘积$(2n-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)$的渐近公式.

解 $$(2n-1)!!=\frac{2n!}{2^n n!}=\frac{\sqrt{2\pi\cdot 2n}(2n)^{2n}\mathrm{e}^{-2n}\mathrm{e}^{\frac{\theta_1}{24n}}}{2^n\sqrt{2\pi n}n^n\mathrm{e}^{-n}\mathrm{e}^{\frac{\theta_2}{12n}}}=\sqrt{2}(2n)^n\mathrm{e}^{-n+\frac{\theta}{12n}},$$

其中$|\theta|<1$ $(0<\theta_1<1,0<\theta_2<1)$.

【3119】 若n甚大,近似地计算C_{2n}^n.

解 $$C_{2n}^n=\frac{2n(2n-1)\cdots(2n-n+1)}{n!}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\frac{\sqrt{2\pi\cdot 2n}(2n)^{2n}\mathrm{e}^{-2n}\mathrm{e}^{\frac{\theta_1}{24n}}}{2\pi n n^{2n}\mathrm{e}^{-2n}\mathrm{e}^{\frac{\theta_2}{6n}}}=\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}\mathrm{e}^{\frac{\theta}{6n}},$$

其中$|\theta|<1$ $(0<\theta_1<1,0<\theta_2<1)$.

【3120】 利用斯特林公式求下列极限:

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}$; (2)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$; (3)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}$; (4)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n!}{\ln n^n}$.

解 (1)$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt[2n^2]{2\pi n}\sqrt[n]{n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{\frac{\theta}{12n^3}}\right]=1.$

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[2n]{2\pi n}\,n\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{\frac{\theta}{12n^2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}}{\sqrt[n]{2\pi n}\,\mathrm{e}^{\frac{\theta}{12n^2}}}=\mathrm{e}.$

(3)利用3118题的结果即得$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[2n]{2}\,2n\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{\frac{\theta}{12n^2}}}=\frac{\mathrm{e}}{2}.$

(4)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n!}{\ln n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(\ln 2+\ln\pi+\ln n)+n\ln n-n+\frac{\theta}{12n}}{n\ln n}=1.$

§ 11. 用多项式逼近连续函数

1° **拉格朗日插值公式** 拉格朗日多项式

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}y_i$$

具有性质 $P_n(x_i)=y_i \quad (i=0,1,\cdots,n)$.

2° **伯恩斯坦多项式** 若 $f(x)$是闭区间$[0,1]$上的连续函数,则伯恩斯坦多项式

$$B_n(x)=\sum_{i=0}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)C_n^i x^i(1-x)^{n-i}$$

当 $n\to\infty$时在闭区间$[0,1]$上一致收敛于函数 $f(x)$.

【3121】 求在给定点按下表取值的最低次的 n 次多项式 $P_n(x)$:

x	-2	0	4	5
y	5	1	-3	1

$P_n(-1)$, $P_n(1)$, $P_n(6)$近似地等于什么?

解 $x_0=-2$, $x_1=0$, $x_2=4$, $x_3=5$;

$y_0=5$, $y_1=1$, $y_2=-3$, $y_3=1$.

$$P_3(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3.$$

以$(x_i,y_i)(i=0,1,2,3)$代入上式,化简即得

$$P_3(x)=1-\frac{55}{21}x-\frac{1}{14}x^2+\frac{5}{42}x^3. \qquad P_3(-1)=1+\frac{55}{21}-\frac{1}{14}-\frac{5}{42}\approx 3.43,$$

$$P_3(1)=1-\frac{55}{21}-\frac{1}{14}+\frac{5}{42}\approx -1.57, \qquad P_3(6)=1-\frac{110}{7}-\frac{18}{7}+\frac{180}{7}\approx 8.43.$$

【3122】 写出经过三点:$A(x_0-h,y_{-1})$, $B(x_0,y_0)$, $C(x_0+h,y_1)$的抛物线方程 $y=ax^2+bx+c$.

解 将三点的坐标代入拉格朗日插值公式,即得

$$y=\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{[(x_0-h)-x_0][(x_0-h)-(x_0+h)]}y_{-1}+\frac{(x-x_0+h)(x-x_0-h)}{[x_0-(x_0-h)][x_0-(x_0+h)]}y_0$$
$$+\frac{(x-x_0+h)(x-x_0)}{[(x_0+h)-(x_0-h)][(x_0+h)-x_0]}y_1$$
$$=y_0+\frac{y_1-y_{-1}}{2h}(x-x_0)+\frac{y_1-2y_0+y_{-1}}{2h^2}(x-x_0)^2.$$

【3123】 利用数值 $x_0=1$, $y_0=1$; $x_1=25$, $y_1=5$; $x_2=100$, $y_2=10$,推出开平方根:$y=\sqrt{x}$ $(1\leqslant x\leqslant 100)$的近似公式.

解 $y=\sqrt{x}$的近似公式可由拉格朗日插值公式求出:

$$y\approx\frac{(x-25)(x-100)}{(-24)\cdot(-99)}\cdot 1+\frac{(x-1)(x-100)}{24\cdot(-75)}\cdot 5+\frac{(x-1)(x-25)}{99\cdot 75}\cdot 10$$
$$=0.808+0.193x-0.00101x^2.$$

例如,

$x=4$, $y\approx 1.564$ (应为 2); $\qquad x=9$, $y\approx 2.463$ (应为 3);

$x=16$, $y\approx 3.637$ (应为 4); $\qquad x=36$, $y\approx 6.447$ (应为 6);

由此看来,误差还较大.

【3124】 利用数值 $\sin 0^\circ=0$，$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$，$\sin 90^\circ=1$，推出如下形式的近似公式：

$$\sin x^\circ \approx ax+bx^3 \quad (0\leqslant x\leqslant 90).$$

利用这个公式，近似地求：$\sin 20^\circ$，$\sin 40^\circ$，$\sin 80^\circ$.

解 将 $x=30$，$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$；$x=90$，$\sin 90^\circ=1$ 代入近似公式 $\sin x^\circ\approx ax+bx^3$，即得联立方程组

$$\begin{cases}30a+27000b=\frac{1}{2},\\ 90a+729000b=1.\end{cases}$$

解之，得 $a=\frac{5}{288}$，$b=-\frac{5}{288}\left(\frac{1}{150}\right)^2$. 因此，

$$\sin x^\circ\approx\frac{5x}{288}\left[1-\left(\frac{x}{150}\right)^2\right].$$

由此近似公式，可得

$$\sin 20^\circ\approx 0.341,\quad \sin 40^\circ\approx 0.645,\quad \sin 80^\circ\approx 0.994,$$

这与查表(四位数学用表)所得的

$$\sin 20^\circ=0.3420,\quad \sin 40^\circ=0.6428,\quad \sin 80^\circ=0.9848,$$

近似.

【3125】 取点 $x_i=0$，$\pm\frac{1}{2}$，± 1 为拉格朗日多项式的插值节点，对函数 $f(x)=|x|$ 作出在闭区间 $[-1,1]$ 上的拉格朗日插值多项式.

解 以 $x_i=0$，$\pm\frac{1}{2}$，± 1，$y_i=0$，$\frac{1}{2}$，1 代入拉格朗日插值公式，即得

$$\begin{aligned}P(x)=&\frac{x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^2-1)}{\left(-\frac{1}{2}\right)(-1)\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2}+\frac{x\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2-1)}{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2}\\&+\frac{x(x-1)\left(x^2-\frac{1}{4}\right)}{(-1)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(-2)}\cdot 1+\frac{x(x+1)\left(x^2-\frac{1}{4}\right)}{1\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2}\cdot 1\\=&\frac{x^2}{3}(7-4x^2)\quad(|x|\leqslant 1),\end{aligned}$$

此即所求的多项式.

【3126】 以拉格朗日多项式代换函数 $y(x)$，近似地计算 $\int_0^2 y(x)\mathrm{d}x$，其中

x	0	0.5	1	1.5	2
$y(x)$	5	4.5	3	2.5	5

解
$$\begin{aligned}y(x)\approx&\frac{(x-0.5)(x-1)(x-1.5)(x-2)}{(-0.5)(-1)(-1.5)(-2)}\cdot 5+\frac{x(x-1)(x-1.5)(x-2)}{0.5\cdot(-0.5)\cdot(-1)\cdot(-1.5)}\cdot 4.5\\&+\frac{x(x-0.5)(x-1.5)(x-2)}{1\cdot 0.5(-0.5)\cdot(-1)}\cdot 3+\frac{x(x-0.5)(x-1)(x-2)}{1.5\cdot 1\cdot 0.5\cdot(-0.5)}\cdot 2.5\\&+\frac{x(x-0.5)(x-1)(x-1.5)}{2\cdot 1.5\cdot 1\cdot 0.5}\cdot 5\\=&\left(\frac{10}{3}x^4-\frac{50}{3}x^3+\frac{87.5}{3}x^2-\frac{62.5}{3}x+5\right)+(-12x^4+54x^3-78x^2+36x)\\&+(12x^4-48x^3+57x^2-18x)+\left(-\frac{20}{3}x^4+\frac{70}{3}x^3-\frac{70}{3}x^2+\frac{20}{3}x\right)\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{10}{3}x^4-10x^3+\frac{27.5}{3}x^2-2.5x\right)$$

$$=\frac{8}{3}x^3-6x^2+\frac{4}{3}x+5.$$

于是，

$$\int_0^2 y(x)\,dx\approx\int_0^2\left(\frac{8}{3}x^3-6x^2+\frac{4}{3}x+5\right)dx=\left(\frac{2}{3}x^4-2x^3+\frac{2}{3}x^2+5x\right)\Big|_0^2=\frac{22}{3}=7\frac{1}{3}.$$

【3127】 对于函数 x, x^2, x^3，试在闭区间$[0,1]$上作出伯恩斯坦多项式 $B_n(x)$.

解 对于函数 $f(x)=x$，其伯恩斯坦多项式 $B_n(x)$ 为

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=x\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k x^k(1-x)^{n-k-1}=x[x+(1-x)]^{n-1}=x;$$

对于函数 $f(x)=x^2$，其伯恩斯坦多项式为

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\frac{1^2}{n^2}C_n^1x(1-x)^{n-1}+\frac{2^2}{n^2}C_n^2x^2(1-x)^{n-2}+\frac{3^2}{n^2}C_n^3x^3(1-x)^{n-3}+\cdots$$

$$+\frac{(n-1)^2}{n^2}C_n^{n-1}x^{n-1}(1-x)+\frac{n^2}{n^2}C_n^n x^n$$

$$=\frac{1}{n}x(1-x)^{n-1}+\frac{2(n-1)}{n}x^2(1-x)^{n-2}+\frac{3}{n}\ \frac{(n-1)(n-2)}{2!}x^3(1-x)^{n-3}+\cdots$$

$$+\frac{n-1}{n}\cdot\frac{(n-1)!}{(n-2)!}x^{n-1}(1-x)+x^n$$

$$=\frac{1}{n}(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1)x(1-x)^{n-1}+\frac{2}{n}(C_{n-1}^1+C_{n-1}^2)x^2(1-x)^{n-2}$$

$$+\frac{3}{n}(C_{n-1}^2+C_{n-1}^3)x^3(1-x)^{n-3}+\cdots+\frac{n-1}{n}(C_{n-1}^{n-2}+C_{n-1}^{n-1})x^{n-1}(1-x)+x^n$$

$$-\left[\frac{1}{n}C_{n-1}^1x(1-x)^{n-1}+\frac{2}{n}C_{n-1}^2x^2(1-x)^{n-2}+\cdots+\frac{n-1}{n}C_{n-1}^{n-1}x^{n-1}(1-x)\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{k}{n}x^k(1-x)^{n-k}-\frac{n-1}{n}x(1-x)\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^k x^k(1-x)^{n-k-2}$$

$$=x-\frac{n-1}{n}x(1-x)=x^2+\frac{x(1-x)}{n}.$$

对于函数 $f(x)=x^3$，其伯恩斯坦多项式为

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^3}{n^3}C_n^k x^k(1-x)^k$$

$$=\frac{1^2}{n^2}C_{n-1}^0x(1-x)^{n-1}+\frac{2^2}{n^2}C_{n-1}^1x^2(1-x)^{n-2}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^2}C_{n-1}^{n-2}x^{n-1}(1-x)+x^n$$

$$=\frac{1^2}{n^2}(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1)x(1-x)^{n-1}+\frac{2^2}{n^2}(C_{n-1}^1+C_{n-1}^2)x^2(1-x)^{n-2}+\cdots$$

$$+\frac{(n-1)^2}{n^2}(C_{n-1}^{n-2}+C_{n-1}^{n-1})x^{n-1}(1-x)+x^n$$

$$-\left[\frac{1^2}{n^2}C_{n-1}^1x(1-x)^{n-1}+\frac{2^2}{n^2}C_{n-1}^2x^2(1-x)^{n-2}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^2}C_{n-1}^{n-1}x^{n-1}(1-x)\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}-\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}x(1-x)$$

$$\cdot\left[\frac{1}{n-2}C_{n-2}^0(1-x)^{n-2}+\frac{2}{n-2}C_{n-2}^1x(1-x)^{n-3}+\cdots+\frac{n-1}{n-2}C_{n-2}^{n-2}x^{n-2}\right]$$

$$=x^2+\frac{x(1-x)}{n}-\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}x(1-x)\left[\frac{1}{n-2}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{k}{n-2}C_{n-2}^k x^k(1-x)^{n-k-2}\right.$$

$$+\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^{k}x^{k}(1-x)^{n-2-k}\Big]$$

$$=x^2+\frac{x(1-x)}{n}-\frac{(n-1)(n-2)x(1-x)}{n^2}\Big[\frac{x}{n-2}\sum_{k=0}^{n-3}C_{n-3}^{k}x^{k}(1-x)^{n-3-k}+1\Big]$$

$$=x^2+\frac{x(1-x)}{n}-\frac{(n-1)(n-2)x(1-x)}{n^2}\Big(\frac{x}{n-2}+1\Big)$$

$$=\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)x^3+\frac{3}{n}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)x^2+\frac{1}{n^2}x.$$

【3128】 对于在闭区间$[a,b]$上的已知函数 $f(x)$，写出伯恩斯坦多项式 $B_n(x)$的公式.

解 令 $a+(b-a)y=x$，则当 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时 $a\leqslant x\leqslant b$，此时

$$y=\frac{x-a}{b-a},\quad 1-y=\frac{b-x}{b-a},\quad f(x)=f(a+(b-a)y),$$

故 $f(x)$在$[a,b]$上的伯恩斯坦多项式为

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f\Big(a+(b-a)\frac{k}{n}\Big)C_n^k\frac{(x-a)^k(b-x)^{n-k}}{(b-a)^n}.$$

【3129】 在闭区间$[-1,1]$上用伯恩斯坦多项式 $B_4(x)$逼近函数 $f(x)=\frac{|x|+x}{2}$. 作出函数 $y=\frac{|x|+x}{2}$和 $y=B_4(x)$的图像.

解 利用 3128 题的结果，易得

$$B_4(x)=\sum_{k=0}^{4}f\Big(-1+\frac{k}{2}\Big)C_4^k\frac{(x+1)^k(1-x)^{4-k}}{2^4}$$

$$=\frac{1}{2}C_4^3\frac{(x+1)^3(1-x)}{2^4}+1\cdot C_4^4\frac{(x+1)^4}{2^4}$$

$$=\frac{1}{8}(1-x)(1+x)^3+\frac{1}{16}(1+x)^4.$$

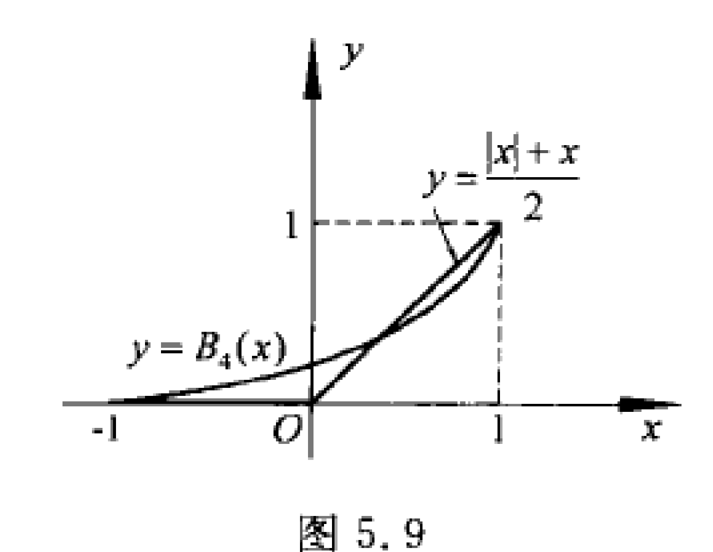


图 5.9

函数 $y=\frac{|x|+x}{2}$和 $y=B_4(x)$的图像如图 5.9 所示.

注 $y=B_4(x)=\frac{1}{8}(1-x)(1+x)^3+\frac{1}{16}(1+x)^4$ 当 $x=-1$ 时为 0；当 $x=1$ 时为 1；当 $x=0$ 时为$\frac{3}{16}$.

又 $y'=\frac{(1+x)^2}{4}(2-x)$，当 $x=-1$ 时，$y'=0$；当 $x\in(-1,1)$时，$y'>0$，故图像上升.

$y''=\frac{3}{4}(1-x^2)\geqslant 0$，故图像向上凹.

【3130】$^+$ 在$-1\leqslant x\leqslant 1$ 内用偶数次的伯恩斯坦多项式逼近函数 $f(x)=|x|$.

解 利用 3128 题的结果，即得

$$B_{2n}(x)=\sum_{k=0}^{2n}\left|-1+\frac{k}{n}\right|C_{2n}^{k}\frac{(x+1)^k(1-x)^{2n-k}}{2^{2n}}$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}\Big\{\sum_{k=0}^{n}\frac{n-k}{n}C_{2n}^{k}(x+1)^k(1-x)^{2n-k}+\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{k-n}{n}C_{2n}^{k}(x+1)^k(1-x)^{2n-k}\Big\}$$

$$=\Big(\frac{1-x^2}{4}\Big)^n\Big\{\sum_{k=0}^{n}\frac{n-k}{n}C_{2n}^{k}\Big(\frac{1-x}{1+x}\Big)^{n-k}+\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{k-n}{n}C_{2n}^{k}\Big(\frac{1-x}{1+x}\Big)^{n-k}\Big\}$$

$$=\Big(\frac{1-x^2}{4}\Big)^n\Big\{\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}C_{2n}^{n-k}\Big(\frac{1-x}{1+x}\Big)^{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}C_{2n}^{n+k}\Big(\frac{1-x}{1+x}\Big)^{-k}\Big\}$$

$$=\Big(\frac{1-x^2}{4}\Big)^n\Big\{\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}C_{2n}^{n-k}\Big(\frac{1-x}{1+x}\Big)^{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}C_{2n}^{n+k}\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big)^{k}\Big\}.$$

由于

$$C_{2n}^{n-k}+C_{2n}^{n+k}=C_{2n}^{n-k}\Big[1+\frac{(n+k)(n+k-1)\cdots(n-k+1)}{(n-k+1)(n-k+2)\cdots(n+k)}\Big]=2C_{2n}^{n-k},$$

故 $C_{2n}^{n-k}=C_{2n}^{n+k}$. 因此,可得

$$B_{2n}(x)=\frac{1}{n}\left(\frac{1-x^2}{4}\right)^n\sum_{k=1}^{n}\left\{kC_{2n}^{n+k}\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^k+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^k\right]\right\}.$$

【3131】 对于函数 $f(x)=e^{kx}(a\leqslant x\leqslant b)$ 写出伯恩斯坦多项式 $B_n(x)$.

解 $B_n(x)=\sum_{j=0}^{n}e^{k(a+(b-a)\frac{j}{n})}C_n^j\frac{(x-a)^j(b-x)^{n-j}}{(b-a)^n}$

$$=\frac{e^{ka}}{(b-a)^n}\sum_{j=0}^{n}e^{k\frac{(b-a)j}{n}}C_n^j(x-a)^j(b-x)^{n-j}=\frac{e^{ka}}{(b-a)^n}\left[e^{\frac{b-a}{n}k}(x-a)+(b-x)\right]^n$$

$$=e^{ka}\left[e^{\frac{b-a}{n}k}\frac{x-a}{b-a}+\frac{b-x}{b-a}\right]^n=e^{ka}\left[(e^{\frac{b-a}{n}k}-1)\frac{x-a}{b-a}+\frac{b-x+x-a}{b-a}\right]^n$$

$$=e^{ka}\left[1+(e^{\frac{b-a}{n}k}-1)\frac{x-a}{b-a}\right]^n.$$

【3132】 在闭区间 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 上,对于函数 $f(x)=\cos x$ 计算多项式 $B_n(x)$.

解 我们有

$$\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}).\tag{1}$$

利用 3131 题的结果(在其中令 $a=-\frac{\pi}{2}$, $b=\frac{\pi}{2}$ 并分别令 $k=i$ 和 $k=-i$),得 e^{ix} 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 的伯恩斯坦多项式 $B_n^{(1)}(x)$ 与 e^{-ix} 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 的伯恩斯坦多项式 $B_n^{(2)}(x)$ 分别为:

$$B_n^{(1)}(x)=e^{-\frac{\pi}{2}i}\left[1+(e^{\frac{i\pi}{n}}-1)\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi}\right)\right]^n,\quad B_n^{(2)}(x)=e^{\frac{\pi}{2}i}\left[1+(e^{-\frac{i\pi}{n}}-1)\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi}\right)\right]^n.$$

于是,

$$B_n^{(1)}(x)=e^{-\frac{\pi i}{2}}\left\{e^{\frac{\pi i}{2n}}\left[e^{\frac{-\pi i}{2n}}+(e^{\frac{\pi i}{2n}}-e^{\frac{-\pi i}{2n}})\left(\frac{x}{\pi}+\frac{1}{2}\right)\right]\right\}^n$$

$$=e^{\frac{-\pi i}{2}}e^{\frac{\pi i}{2}}\left[\cos\frac{\pi}{2n}-i\sin\frac{\pi}{2n}+2i\sin\frac{\pi}{2n}\left(\frac{x}{\pi}+\frac{1}{2}\right)\right]^n=\left(\cos\frac{\pi}{2n}+i\frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^n.$$

同理可得 $B_n^{(2)}(x)=\left(\cos\frac{\pi}{2n}-i\frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^n$.

于是,根据(1)式,即知 $\cos x[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上的伯恩斯坦多项式 $B_n(x)$ 为:

$$B_n(x)=\frac{1}{2}[B_n^{(1)}(x)+B^{(2)n}(x)]=\frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{\pi}{2n}+i\frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^n+\left(\cos\frac{\pi}{2n}-i\frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^n\right].$$

应当指出,我们也可不利用(1)式以及 3131 题的结果,而利用 3128 题的结果直接写出 $\cos x$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上的伯恩斯坦多项式 $B_n(x)$:

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)C_n^k\frac{\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^k\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{n-k}}{\pi^n}=\sum_{k=0}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}C_n^k\frac{(\pi+2x)^k(\pi-2x)^{n-k}}{(2\pi)^n},$$

这是 $B_n(x)$ 的另一表示式.

【3133】 证明:在闭区间 $[-1,1]$ 上 $|x|=\lim_{n\to\infty}P_n(x)$,其中

$$P_n(x)=1-\frac{1-x^2}{2}-\sum_{i=2}^{n}\frac{1\cdot3\cdots(2i-3)}{2\cdot4\cdots(2i)}(1-x^2)^i.$$

证 $|x|=\sqrt{x^2}=\sqrt{1-t}$,其中 $t=1-x^2$.

我们知道,函数 $\sqrt{1-t}$ 按幂级数展开有

$$\sqrt{1-t}=1+\frac{1}{2}(-t)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-t)^n$$

$$=1-\frac{t}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)(-3)\cdots(-2n+3)}{n!\ 2^n}(-1)^n t^n$$

$$=1-\frac{t}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n)}(-1)^{2n-1}t^n$$

$$=1-\frac{t}{2}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}t^n \quad (-1<t<1). \tag{1}$$

当 $t=\pm 1$ 时，上式右端级数为

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}(\pm 1)^n=\sum_{n=2}^{\infty}a_n.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{2n+2}{2n-1}-1\right)=\frac{3}{2}>1,$$

故由拉比判别法可知级数 $\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|$ 收敛，从而，级数 $\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ 收敛. 因此，由幂级数的阿贝尔定理知，(1)式当 $t=\pm 1$ 时也成立，即有

$$\sqrt{1-t}=1-\frac{t}{2}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}t^n \quad (-1\leqslant t\leqslant 1). \tag{2}$$

于是，将 $t=1-x^2$ 代入，即得

$$|x|=1-\frac{1-x^2}{2}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}(1-x^2)^n=\lim_{n\to\infty}P_n(x) \quad (-1\leqslant x\leqslant 1). \tag{3}$$

证毕.

注 由幂级数的性质知，(2)式右端的级数在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上一致收敛(实际在 $-1\leqslant t\leqslant 1$ 上也一致收敛)，故(3)式中的级数在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上一致收敛. 因此，我们实际证明了更强的结论：当 $n\to\infty$ 时 $P_n(x)$ 在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上一致趋于 $|x|$.

【3134】 设 $f(x)$ 是对于 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 的连续函数，而 a_n, b_n $(n=0,1,2,\cdots)$ 是它的傅里叶系数. 证明：费耶尔三角多项式

$$\sigma_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)(a_i\cos ix+b_i\sin ix)$$

在区间 $(-\pi,\pi)$ 上一致收敛于函数 $f(x)$.

证 首先指出，本题结论有误，在所设条件下，只能断定：对任何 $\eta>0$，$\sigma_n(x)$ 在 $[-\pi+\eta,\pi-\eta]$ 上一致收敛于 $f(x)$，而一般推不出 $\sigma_n(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上一致收敛于 $f(x)$. 但若再假定 $f(-\pi)=f(\pi)$，则能推出 $\sigma_n(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

今证于下. 首先，以 $f(x)$ 在 $-\pi\leqslant x<\pi$ 上的函数值为基础按 2π 为周期将函数 $f(x)$ 延拓到整个 $(-\infty,+\infty)$ 上，延拓后的函数仍记为 $f(x)$ (注意，若原来 $f(-\pi)\neq f(\pi)$，则延拓后的函数在 $x=\pi$ 的函数值不等于原来的函数值 $f(\pi)$. 但一个点的函数值对于下面各积分之值毫无影响). 用 $S_n(x)$ 表 $f(x)$ 的傅里叶级数的部分和，则

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mx+b_m\sin mx)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\left[\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{n}\cos m(u-x)\right]du,$$

将 n 个等式

$$2\sin\frac{v}{2}\cos mv=\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)v-\sin\left(m-\frac{1}{2}\right)v \quad (m=1,2,\cdots,n)$$

相加得 $\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{n}\cos mv=\dfrac{\sin(2n+1)\frac{v}{2}}{2\sin\frac{v}{2}}$，从而(作代换 $u-x=t$)，

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\frac{\sin(2n+1)\frac{u-x}{2}}{2\sin\frac{u-x}{2}}\mathrm{d}u=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t.$$

由于周期为 2π 的函数 $F(u)$ 在长为 2π 的闭区间 $[\lambda,\lambda+2\pi]$ 上的积分 $\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi}F(u)\mathrm{d}u$ 与 λ 无关,故上式右端的积分 $\int_{-\pi-x}^{\pi-x}$ 可换为 $\int_{-\pi}^{\pi}$. 由此,再将 $\int_{-\pi}^{\pi}$ 表为 $\int_{-\pi}^{0}+\int_{0}^{\pi}$,并在 $\int_{-\pi}^{0}$ 中作代换 $t=-s$,即得表达式

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t.$$

显然 $\sigma_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}S_k(x)$,故

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{n\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t.$$

由于

$$2\sin\frac{t}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t=\sum_{k=0}^{n-1}[\cos kt-\cos(k+1)t]=1-\cos nt=2\sin^2\frac{nt}{2},$$

故

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2n\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\left(\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\mathrm{d}t. \tag{1}$$

特别在(1)式中,令 $f(x)\equiv1$,则显然这时 $S_n(x)\equiv1$,从而 $\sigma_n(x)\equiv1$,因此得下面的等式:

$$1=\frac{1}{n\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\mathrm{d}t. \tag{2}$$

(1)式减去(2)式乘 $f(x)$,得

$$\sigma_n(x)-f(x)=\frac{1}{2n\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+t)-f(x)+f(x-t)-f(x)]\left(\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\mathrm{d}t. \tag{3}$$

由(3)式证明下述两个结论:

(ⅰ)对任何 $\eta>0$,$\sigma_n(x)$ 在 $-\pi+\eta\leqslant x\leqslant\pi-\eta$ 上一致收敛于 $f(x)$.

(ⅱ)若更设 $f(-\pi)=f(\pi)$,则 $\sigma_n(x)$ 在 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 上一致收敛于 $f(x)$.

先证(ⅰ). 设已给 $\eta>0$. 显然,$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界,故存在常数 $M>0$,使

$$|f(x)|\leqslant M\qquad(-\infty<x<+\infty).$$

注意,延拓后的函数在点 $x=\pi$, $x=-\pi$ 可能不连续,(可能有第一类不连续点),但在 $-\pi<x<\pi$ 上肯定是连续的,因此,在 $\left[-\pi+\frac{\eta}{2},\pi-\frac{\eta}{2}\right]$ 上必一致连续. 于是,对任给的 $\varepsilon>0$,必有 $\delta>0$ 存在,使对于闭区间 $\left[-\pi+\frac{\eta}{2},\pi-\frac{\eta}{2}\right]$ 上任何两点 x', x'',只要 $|x'-x''|\leqslant\delta$,就有 $|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}$. 令 $\tau=\min\left\{\delta,\frac{\eta}{2}\right\}$. 根据(3)式,有

$$\sigma_n(x)-f(x)=\frac{1}{2n\pi}\int_{0}^{\tau}[f(x+t)-f(x)+f(x-t)-f(x)]\left(\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\mathrm{d}t$$

$$+\frac{1}{2n\pi}\int_{\tau}^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]\left(\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\mathrm{d}t$$

$$=I_1+I_2; \tag{4}$$

显然，当 $0\leqslant t\leqslant\tau$，$-\pi+\eta\leqslant x\leqslant\pi-\eta$ 时，有 $x+t\in\left[-\pi+\frac{\eta}{2},\pi-\frac{\eta}{2}\right]$，$x-t\in\left[-\pi+\frac{\eta}{2},\pi-\frac{\eta}{2}\right]$，从而，

$$|f(x+t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |f(x-t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此（再注意到(2)式），当 $-\pi+\eta\leqslant x\leqslant\pi-\eta$ 时，有

$$|I_1|\leqslant\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\tau}[|f(x+t)-f(x)|+|f(x-t)-f(x)|]\left(\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\mathrm{d}t<\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{n\pi}\int_0^{\tau}\left(\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\mathrm{d}t<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

另一方面，当 $\tau\leqslant x\leqslant\pi$ 时，有 $\left(\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\leqslant\frac{1}{\sin^2\frac{\tau}{2}}$. 于是，当 $-\infty<x<+\infty$ 时，有

$$|I_2|\leqslant\frac{1}{2n\pi}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\tau}{2}}\int_{\tau}^{\pi}4M\mathrm{d}t<\frac{2M}{n\sin^2\frac{\tau}{2}}. \tag{6}$$

由(4)、(5)、(6)诸式可知：当 $-\pi+\eta\leqslant x\leqslant\pi-\eta$ 时，有

$$|\sigma_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{n\sin^2\frac{\tau}{2}}\quad(n=1,2,\cdots).$$

令 $N=\left[\frac{4M}{\varepsilon\sin^2\frac{\tau}{2}}\right]$，则当 $n>N$ 时，对一切 $x\in[-\pi+\eta,\pi-\eta]$，恒有 $|\sigma_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. 由此可知，$\sigma_n(x)$ 在 $[-\pi+\eta,\pi-\eta]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

再证(ⅱ)，若原来给定的 $[-\pi,\pi]$ 上的连续函数 $f(x)$ 满足 $f(-\pi)=f(\pi)$，则前述延拓出去后的函数 $f(x)$ 是整个 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数. 因此，在 $[-2\pi,2\pi]$ 上必一致连续. 于是，对于任给的 $\varepsilon>0$，必有 $\tau>0$ 存在（可取 $\tau<\pi$），使对于 $[-2\pi,2\pi]$ 中的任何两点 x'、x''，只要 $|x'-x''|\leqslant\tau$，就有

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

以下的证明和(ⅰ)对应部分类似. 首先，对刚才确定的 τ，写出(4)式. 显然，当 $0\leqslant t\leqslant\tau$，$-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 时，有 $x+t\in[-2\pi,2\pi]$，$x-t\in[-2\pi,2\pi]$，故

$$|f(x+t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |f(x-t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而，当 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 时(5)式成立. 同样(6)式成立. 于是，当 $n>N=\left[\frac{4M}{\varepsilon\sin^2\frac{\tau}{2}}\right]$ 时，对一切 $x\in[-\pi,\pi]$，恒有

$$|\sigma_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

故 $\sigma_n(x)$ 在 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 上一致收敛于 $f(x)$.

最后，我们举例说明，若 $f(-\pi)\neq f(\pi)$，则一般不能断定 $\sigma_n(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内一致收敛于 $f(x)$. 例如，设

$$f(x)=x\qquad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

我们证明这时的 $\sigma_n(x)$ 在 $-\pi<x<\pi$ 内不一致收敛于 $f(x)$. 用反证法，假定 $\sigma_n(x)$ 在 $-\pi<x<\pi$ 内一致收敛于 $f(x)=x$. 由傅里叶级数的收敛性定理（即狄利克雷定理）知，

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi), \tag{7}$$

这里

$$S(x)=\begin{cases}f(x)=x, & -\pi<x<\pi,\\ \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=0, & x=\pm\pi.\end{cases}$$

由此可知，$S(x)$在点 $x=\pi$ 和 $x=-\pi$ 不连续，但另一方面，根据(7)式，利用138题的结果知，

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x)=S(x)\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi).\tag{8}$$

由反证法的假定，$\sigma_n(x)$在$-\pi<x<\pi$内一致收敛于$S(x)$（在$-\pi<x<\pi$内，$f(x)=x=S(x)$）. 而由(8)式，当 $x=\pi$ 和 $x=-\pi$ 时，$\sigma_n(x)$也收敛于$S(x)$，故知$\sigma_n(x)$在$-\pi\leqslant x\leqslant\pi$上一致收敛于$S(x)$. 显然，$\sigma_n(x)$都是$x$的连续函数$(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$. 由此可知，极限函数$S(x)$也必在$-\pi\leqslant x\leqslant\pi$上连续；此与$S(x)$在$x=\pi$和$x=-\pi$不连续的事实相矛盾，此矛盾证明了$\sigma_n(x)$在$(-\pi,\pi)$内收敛于$f(x)=x$不是一致的.

本题证毕.

【3135】 对于函数 $f(x)=|x|$ $(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$. 作出费耶尔多项式 $\sigma_{2n-1}(x)$.

解 由于 $f(x)$是偶函数，故

$$b_n=0\quad(n=1,2,\cdots),$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\mathrm{d}x=\pi,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]\quad(n=1,2,\cdots),$$

故 $a_{2k}=0$，$a_{2k-1}=-\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi}$ $(k=1,2,\cdots)$. 于是，

$$\sigma_{2n-1}=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\cos(2k-1)x$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$$